

آمادگی برای امتحان
ریاضی عمومی دو

مهدی نجفی خواه

دانشگاه علم و صنعت ایران^۱

۱۳۹۹

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

Copyright : Mehdi Nadjafikhah
e-mail : m_nadjafikhah@iust.ac.ir

Web : http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah
Telegram : <https://t.me/GenMat2>

نجفی خواه، مهدی، ۱۳۴۹ -
 آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی ۲ / تألیف مهدی نجفی خواه.
 - تهران: ساحل اندیشه تهران، ۱۳۸۶.
 ۱۵۵ ص. مصور، جدول، نمودار.
 ISBN 964-94471-1-3
 فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
 ص. ع. به انگلیسی: Calculus II in exams.
 چاپ دوم.
 ۱. ریاضیات - کتابهای درسی - راهنمای آموزشی (عالی). ۲.
 ریاضیات - آزمونها و تمرینها (عالی). الف. عنوان. ب. عنوان:
 ریاضی عمومی ۲.

۷۶/۵۱۰	QA۱۳۹/ن۳۷۱۸
	۱۳۸۶
م۸۲-۲۸۴۸۵	کتابخانه ملی ایران

نام کتاب: آمادگی برای امتحان ریاضی عمومی ۲
 نویسنده: دکتر مهدی نجفی خواه
 ناشر: ساحل اندیشه تهران
 نوبت چاپ: سوم، بهار ۱۳۸۶
 تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
 تعداد صفحات: ؟؟
 تعداد امتحانات پاسخ داده شده: ۲۱
 تعداد شکلها: ۴۱
 تعداد مسایل حل شده: ۱۷۱

مقدمه

آنچه در پیش روی شما قرار دارد، مجموعه‌ای مرکب از امتحانات انتخابی استاندارد پایان ترم می‌باشد. هدف از تألیف این کتاب، فراهم نمودن مجموعه‌ای از مسائل حل شده برای دانشجویان درس ریاضی عمومی ۲ می‌باشد.

این کتاب برای سه دسته از دانشجویان می‌تواند مفید باشد، ۱) آنهایی که می‌خواهند با حل مسائل شبیه امتحان پایان ترم، ضمن سنجش اطلاعات خود، شرایط لازم برای قبولی در امتحانات پایان ترم را فراهم نمایند. ۲) آن دسته از دانشجویانی که می‌خواهند با حل مسائل بیشتر، موجبات کسب نمره بالاتر در آزمون پایان ترم را فراهم نمایند. ۳) دانشجویانی که در دانشگاه‌های مختلف درس می‌خوانند و می‌خواهند سطح خود را با دانشجویان سایر دانشگاه‌ها مقایسه کنند.

ریاضی عمومی دو دومین درسی است که دانشجویان فنی و مهندسی در دانشگاه اخذ می‌کنند. می‌توان گفت که این درس تعمیم طبیعی ریاضی عمومی یک به حالت ابعاد بالا است، و هدف از آن گسترش ابزار ریاضی موجود در ریاضی عمومی یک به مسائل عملی‌تر است. این درس از سه بخش کلی تشکیل می‌گردد: ۱) مقدمات، که جبر خطی، هندسه تحلیلی و توابع برداری را شامل می‌گردد. ۲) حد و مشتق توابع چند متغیره و کاربردهای آن. ۳) انتگرال دوگانه، سه‌گانه، خط، سطح و قضایای کلاسیک. چون معمولاً دانشجویان در دبیرستان با جبر خطی و هندسه تحلیلی آشنا می‌شوند، اغلب از بیان مبسوط آنها خودداری می‌شود و به سرعت از آنها گذشته می‌شود.

متأسفانه حجم مطالب این درس بسیار است و زمان در نظر گرفته شده (دو ساعت و ربع و با سه ساعت در هفته) کفاف بیان دقیق همه مطالب را نمی‌دهد. بعلاوه، مطالب درس بسیار به یکدیگر مرتبط هستند و عدم مطالعه مناسب قسمتی از آن، به معنی از دست دادن همه مطالب بعد از آن موضوع می‌باشد. دیده می‌شود که دانشجویان به دنبال کتابی می‌گردند که دارای مسائل حل شده بیشتری باشد. آنها علاقمند به داشتن کتابی هستند که به مسائل کلیدی بپردازد و از بحث‌های نظری طولانی خودداری کند. می‌توان گفت که منظور اصلی از تألیف این کتاب، پر کردن این خلأ می‌باشد. جهت مشاهده مطالب بیشتر به همراه شرح مبسوط درس و تمرینات و مثالهای متعدد، به کتاب:

« ریاضی عمومی ۲، تألیف مهدی نجفی خواه، ناشر: ساحل اندیشه تهران، ۱۳۸۶ » می‌توانید مراجعه کنید. در این کتاب ضمن آموزش ریاضی عمومی ۲ به شیوه استاندارد و مطابق سیلابس وزارت علوم، چگونگی استفاده از نرم افزار میپل در آن نیز آموزش داده می‌شود.

توصیه مؤلف به خواننده محترم این است که از این کتاب به عنوان موقعیتی برای شرکت در امتحانات پایان ترم استفاده کند. به این ترتیب که ابتدا مسائل را شخصاً در زمان معادل ۲ ساعت حل کنید و سپس راه حل خود را با پاسخ داده شده مقایسه نموده و اشتباهات احتمالی خود را دریابید. سپس به کتاب درسی مراجعه نموده و به رفع مشکلاتی احتمالی بپردازید. به جا است که مراتب امتنان خود را از آقایان علی رجبی و کاظم نوری و نیز خانم هانیه کارخانه که با دقت وصف ناپذیر به بازخوانی این اثر پرداختند، اعلام نمایم. از مسئولین محترم انتشارات ساحل اندیشه تهران نیز که شرایط لازم برای نشر این اثر را فراهم نموده اند قدردانی می‌نمایم. در پایان از دانشجویان محترم و نیز همکاران ارجمند تقاضا می‌شود که هرگونه نظر و پیشنهاد در مورد مطالب این کتاب را کتباً با این جانب (به آدرس: تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی و یا e-mail: m_nadjafikhahiust.ac.ir) در میان بگذارند.

مهدی نجفی خواه

تهران، ۸ مهر ۱۳۸۶

این کتاب نسخه اصلاح شده کتاب پس از گذشت سالها از انتشار اولیه آن می‌باشد. در این سالها این کتاب به صورت چاپی و نیز به صورت پی دی اف در اختیار عمومی قرار گرفته بود و نظرات متعددی از خوانندگان به این جانب منعکس گردید. ضمن تشکر از همه این عزیزان، در موارد بسیاری پاسخ مسایل ساده‌تر شده است و چند نمونه امتحان جدیدتر نیز به آن افزون گردیده است. امید است همچنان از نظرات پر بار خوانندگان بهره مند باشم.

مهدی نجفی خواه

تهران، ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

فهرست مطالب

مقدمه

فصل ۱ صورت مسایل

۷		امتحان اول	۱.۱
۹		امتحان دوم	۲.۱
۱۰		امتحان سوم	۳.۱
۱۱		امتحان چهارم	۴.۱
۱۲		امتحان پنجم	۵.۱
۱۳		امتحان ششم	۶.۱
۱۴		امتحان هفتم	۷.۱
۱۵		امتحان هشتم	۸.۱
۱۶		امتحان نهم	۹.۱
۱۸		امتحان دهم	۱۰.۱
۱۹		امتحان یازدهم	۱۱.۱
۲۰		امتحان دوازدهم	۱۲.۱
۲۱		امتحان سیزدهم	۱۳.۱
۲۲		امتحان چهاردهم	۱۴.۱
۲۳		امتحان پانزدهم	۱۵.۱
۲۴		امتحان شانزدهم	۱۶.۱
۲۵		امتحان هفدهم	۱۷.۱
۲۷		امتحان هجدهم	۱۸.۱
۲۹		امتحان نوزدهم	۱۹.۱

۲۰.۱	امتحان بیستم	۳۱
۲۱.۱	امتحان بیست و یکم	۳۳
۲۲.۱	امتحان بیست و دوم	۳۴

فصل ۲ پاسخ مسایل

۱.۲	پاسخ مسایل امتحان اول	۳۶
۲.۲	پاسخ مسایل امتحان دوم	۴۶
۳.۲	پاسخ مسایل امتحان سوم	۵۲
۴.۲	پاسخ مسایل امتحان چهارم	۵۸
۵.۲	پاسخ مسایل امتحان پنجم	۶۳
۶.۲	پاسخ مسایل امتحان ششم	۷۰
۷.۲	پاسخ مسایل امتحان هفتم	۷۶
۸.۲	پاسخ مسایل امتحان هشتم	۸۳
۹.۲	پاسخ مسایل امتحان نهم	۹۱
۱۰.۲	پاسخ مسایل امتحان دهم	۱۰۰
۱۱.۲	پاسخ مسایل امتحان یازدهم	۱۰۶
۱۲.۲	پاسخ مسایل امتحان دوازدهم	۱۱۱
۱۳.۲	پاسخ مسایل امتحان سیزدهم	۱۱۹
۱۴.۲	پاسخ مسایل امتحان چهاردهم	۱۲۷
۱۵.۲	پاسخ مسایل امتحان پانزدهم	۱۳۲
۱۶.۲	پاسخ مسایل امتحان شانزدهم	۱۳۸
۱۷.۲	پاسخ مسایل امتحان هفدهم	۱۴۵
۱۸.۲	پاسخ مسایل امتحان هجدهم	۱۵۴
۱۹.۲	پاسخ مسایل امتحان نوزدهم	۱۶۱
۲۰.۲	پاسخ مسایل امتحان بیستم	۱۶۸
۲۱.۲	پاسخ مسایل امتحان بیست و یکم	۱۷۶
۲۲.۲	پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم	۱۸۲

فرمولهای لازم

فصل ۱

صورت مسایل

امتحان اول

۱.۱. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع 2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در مبداء مختصات بحث کنید.

۲.۱. معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی C به معادله:

$$C : x^2 - 3xy + z^2 = 1, \quad 2x \tan(xz) + 2y^2 - z = 1,$$

را در نقطه $M(0, 1, 1)$ بیابید.

۳.۱. مشتق تابع $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ را در امتداد خط مماس بر منحنی C با معادله:

$$C : x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = 2t^4,$$

در نقطه $(1, 2, -2)$ واقع بر منحنی بدست آورید.

۴.۱. حاصل انتگرال دوگانه $\int_0^1 \left[\int_{e^x}^e \frac{1}{\ln y} dy \right] dx$ را بعد از تغییر مرتبه محاسبه کنید.

^۲ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۵.۱. به کمک تغییر متغیر در مختصات کروی حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy.$$

۶.۱. درستی قضیه دیورژانس (استروگراسکی) را برای میدان برداری $\mathbf{F} = 5z\mathbf{k}$ روی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۳ بررسی کنید.

۷.۱. صحت قضیه استوکس را با فرض $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ روی سطح S ، که در آن S قسمتی از سطح $x^2 + z^2 = 1$ در یک هشتم اول و محدود به صفحه $y = 2$ است، بررسی کنید.

سئوالات تستی: پاسخ صحیح سئوالات تستی زیر را همراه با راه حل مشخص کنید:

۸.۱. اگر $\omega = x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ ، آنگاه حاصل عبارت $x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$ برابر است با
الف) 2ω ، ب) $-\omega$ ، پ) ω ، ت) -2ω ؟

۹.۱. دو خط $L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{4}$ و $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{1-z}{5}$
الف) در یک نقطه متقاطع هستند، ب) موازی هستند،
پ) بر هم منطبق هستند، ت) متناظر هستند.

۱۰.۱. معادله صفحه مماس بر بیضی‌گون $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ و موازی با صفحه $2x - 4y + 2z = 0$ عبارت است از:

الف) $x - 2y + z = 2$ ، ب) $x - 2y + z = 1$ ، پ) $x - 2y + z = 3$ ، ت) $2x - 2y + 2z = 5$.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱ در صفحه ۳۶، مساله ۲.۱ در صفحه ۳۷، مساله ۳.۱ در صفحه ۳۷،
مساله ۴.۱ در صفحه ۳۸، مساله ۵.۱ در صفحه ۳۸، مساله ۶.۱ در صفحه ۳۹، مساله ۷.۱ در صفحه ۴۱،
مساله ۸.۱ در صفحه ۴۳، مساله ۹.۱ در صفحه ۴۴، مساله ۱۰.۱ در صفحه ۴۴ است.

امتحان دوم

۱.۲. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در نقطه $(0, 0)$ بحث کنید.

۲.۲. معادله خط مماس بر فصل مشترک دو رویه $3x^2 + y^2 - z^2 = 3$ و $x^2 + y^2 + z = 1$ را در نقطه $P(1, -1, -1)$ بدست آورید. سپس معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $M(2, 3, 4)$ گذشته و عمود بر این خط مماس باشد.

۳.۲. هرگاه $u = yf(x+y) + xg(x+y)$ باشد، آنگاه نشان دهید که $u_{xx} - 2u_{yx} + u_{yy} = 0$.

۴.۲. مطلوب است محاسبه $\iint_D x dx dy$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول و بین دایره $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = 2x$ است.

۵.۲. حجم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ که به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود شده است را به دست آورید.

۶.۲. تابع برداری $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + \frac{1}{4}y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ مفروض است. انتگرال سطح این تابع را بر روی سطح بیضی گون خارجی $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$ به کمک قضیه دیورژانس (واگرایی) محاسبه کنید.

۷.۲. فرض کنید S آن قسمت از سطح سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ باشد که بالای صفحه $z = 0$ واقع است و منحنی C مرز آن است. با توجه به این مفروضات، درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۲ در صفحه ۴۶، مساله ۲.۲ در صفحه ۴۶، مساله ۳.۲ در صفحه ۴۷، مساله ۴.۲ در صفحه ۴۸، مساله ۵.۲ در صفحه ۴۸، مساله ۶.۲ در صفحه ۴۹، مساله ۷.۲ در صفحه ۵۰ است.

امتحان سوم

۱.۳. معادله صفحه‌ای را بیابید که از دو نقطه $(1, 1, 0)$ و $(0, 1, 1)$ به یک فاصله است و از بین آن دو نیز می‌گذرد.

۲.۳. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در نقطه $(0, 0)$ بحث کنید.

۳.۳. فرض کنیم منحنی C به صورت فصل مشترک دو رویه

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2 + 1, \quad z = x^2 + y^2,$$

تعریف شود. بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ ، و مقادیر انحنا و تاب را در یک نقطه دلخواه (x, y, z) بیابید.

۴.۳. با فرض $F(x, y, z) = 0$ ، مقدار عبارت $\frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial y}$ را بیابید.

۵.۳. مطلوب است محاسبه مساحت قسمتی از سطح $z = x^2 - y^2$ که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد.

۶.۳. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_R \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] dx dy dz$.

۷.۳. هرگاه $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$ ، درستی قضیه دیورژانس را برای سطحی که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و از پایین به سهمیگون $z = x^2 + y^2$ محصور است تحقیق کنید.

۸.۳. هرگاه منحنی C به معادلات $z = x + y$ ، $x^2 + y^2 = a^2$ ، C داده شده باشد، به کمک قضیه استوکس انتگرال خط زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz.$$

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۳ در صفحه ۵۲، مساله ۲.۳ در صفحه ۵۲، مساله ۳.۳ در صفحه ۵۲، مساله ۴.۳ در صفحه ۵۳، مساله ۵.۳ در صفحه ۵۴، مساله ۶.۳ در صفحه ۵۴، مساله ۷.۳ در صفحه ۵۵، مساله ۸.۳ در صفحه ۵۶ است.

امتحان چهارم

۱.۴. معادله صفحه‌ای را بنویسید که با خط $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ موازی و از فصل مشترک صفحات $x+y-z=0$ و $x-y+z+1=0$ بگذرد.

۲.۴. در وجود و یا در عدم وجود اکسترموم‌های تابع $z = 4x^3 - 3xy^2 + y^2 + y$ بحث کنید.

۳.۴. در مشتق‌پذیری یا عدم مشتق‌پذیری تابع زیر بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۴.۴. هرگاه D ناحیه محصور بین خطوط $y = x - 1$ ، $y = x$ و $x + 2y = 0$ و $x + 2y = 1$ باشد، آنگاه $\iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)} dx dy$ را محاسبه کنید.

۵.۴. حجم جسم صلبی که از پائین به صفحه xOy و از بالا به سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و از اطراف به هذلولیگون یکپارچه $x^2 + y^2 = z^2/4 + 1$ محصور شده است را بیابید.

۶.۴. انتگرال خط تابع برداری $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (x-z)\mathbf{k}$ را بر روی مرز ناحیه $z = x^2 + y^2$ و $z = 4$ به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

۷.۴. هرگاه $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ و S سطح خارجی کره‌ای به شعاع یک باشد، آنگاه انتگرال سطح $\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ را به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۴ در صفحه ۵۸، مساله ۲.۴ در صفحه ۵۸، مساله ۳.۴ در صفحه ۵۸، مساله ۴.۴ در صفحه ۵۹، مساله ۵.۴ در صفحه ۶۰، مساله ۶.۴ در صفحه ۶۱، مساله ۷.۴ در صفحه ۶۲ است.

امتحان پنجم

۱.۵. معادله صفحه‌ای را بنویسید که دو خط زیر را شامل شود:

$$\ell_1: x = 1 + 6t, \quad y = 3 - 5t, \quad z = 2 - 4t,$$

$$\ell_2: x + 2y - z = -2, \quad 3x + 2y + 2z = 7.$$

۲.۵. خمی به معادله $\mathbf{r}(t) = 3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$ مفروض است، بردارهای $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$ و مقدار انحناء را در هر نقطه دلخواه از آن بیابید.

۳.۵. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در کل فضای $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

۴.۵. اگر x و y متغیرهای مستقل باشند و

$$u^3 + v^3 + x^5 + 4y^5 = 10, \quad u^2 + v^2 + x^9 + y^8 = 11,$$

آنگاه مطلوب است محاسبه u_x و v_y .

۵.۵. مطلوب است $\iint_R e^{-(x^2/a^2 + y^2/b^2)} dx dy$ که در آن R ناحیه داخل بیضی به معادله $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ است.

۶.۵. حجم جسم صلب محصور بین سطوح $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید ($a < b$).

۷.۵. مساحت سطح جدا شده از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ بوسیله صفحات $z = 1$ و $z = 2$ را به دست آورید.

۸.۵. انتگرال خط $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$ را محاسبه کنید.

۹.۵. درستی قضیه دیورژانس را برای سطح S خارج جسم محدود به صفحات $x = 0$ ، $x + y + z = 1$ و $z = 0$ و میدان برداری $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۵ در صفحه ۶۳، مساله ۲.۵ در صفحه ۶۳، مساله ۳.۵ در صفحه ۶۴، مساله ۴.۵ در صفحه ۶۴، مساله ۵.۵ در صفحه ۶۵، مساله ۶.۵ در صفحه ۶۶، مساله ۷.۵ در صفحه ۶۶، مساله ۸.۵ در صفحه ۶۷، مساله ۹.۵ در صفحه ۶۸.

امتحان ششم

۱.۶. a معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $(0, -1, 1)$ و محل تقاطع دو صفحه به معادلات $x + y - z = -1$ و $2x - 3y + z = 2$ بگذرد. b نوع سطح $xyz = 0$ را مشخص کنید.

۲.۶. پتانسیل میدان نیروی $\mathbf{F} = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k}$ را بیابید.

۳.۶. هرگاه $h(x, y) = f(x + 2y) + f(x - 2y)$ ، مقدار عبارت $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 4\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ را بیابید.

۴.۶. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در نقطه $(0, 0)$ بحث کنید.

۵.۶. گشتاور ماند نسبت به محور x یک ناحیه جرم‌دار محصور به بیضی به معادله $9y^2 + z^2 = 9$ را با فرض ثابت بودن تابع چگالی $(\delta = 1)$ بیابید.

۶.۶. انتگرال سه‌گانه تابع $f(x, y, z) = xyz$ را بر ناحیه R محصور بین استوانه‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + z^2 = 4$ محاسبه کنید.

۷.۶. انتگرال خط تابع $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ را در طول دایره مثلثاتی محاسبه کنید. آیا انتگرال فوق را می‌توان به کمک قضیه گرین محاسبه نمود؟ چرا؟

۸.۶. انتگرال خط $\int_C x(z - y) dx + y(x - z) dy + z(y - x) dz$ که در آن C مثلثی با رئوس $(0, 0, 9)$ ، $(0, 9, 0)$ ، $(9, 0, 0)$ واقع بر صفحه‌ای به معادله $x + y + z = 9$ است را به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

۹.۶. انتگرال سطح تابع برداری $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ بر سطح خارجی بیضوی $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ را به کمک قضیه گاوس (دیورژانس یا استروگراسکی) محاسبه کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۶ در صفحه ۷۰، مساله ۲.۶ در صفحه ۷۰، مساله ۳.۶ در صفحه ۷۱، مساله ۴.۶ در صفحه ۷۱، مساله ۵.۶ در صفحه ۷۲، مساله ۶.۶ در صفحه ۷۲، مساله ۷.۶ در صفحه ۷۳، مساله ۸.۶ در صفحه ۷۳، مساله ۹.۶ در صفحه ۷۴ است.

امتحان هشتم

۱.۷. منحنی C از تلاقی سطوح $x^2 + 2yz = 13$ و $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$ حاصل شده است. نشان دهید خط مماس بر منحنی C در نقطه $A = (1, 2, 3)$ از نقطه $B = (-1, 4, 1)$ می‌گذرد.

۲.۷. پیوستگی تابع داده شده را در نقطه $(0, 0)$ بررسی کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۳.۷. متحرکی بر روی یک مسیر داده شده با قانون زیر حرکت می‌کند:

$$x = 3 \int_0^t \sin(u^2) du, \quad y = 5 \int_0^t \cos(u^2) du, \quad z = 4 \int_0^t \sin(u^2) du, \quad t \geq 0.$$

الف) مطلوب است مسافت طی شده از لحظه $t = 0$ تا لحظه $t = 1$.
ب) شعاع انحناء مسیر فوق را در نقطه $t = 1$ بیابید.

۴.۷. z تابعی از متغیرهای x و y است که توسط معادلات $y = u + v$ و $x = u^2 + v^2$ و $z = u^3 + v^3$ تعریف شده است (u و v را تابعی از x و y در نظر بگیرید). مطلوب است محاسبه $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$.

۵.۷. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ که در آن D به وسیله استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ و صفحات $z = 0$ ، $y = 0$ و $z = a > 0$ واقع در یک هشتم اول محصور شده است.

۶.۷. مطلوب است تعیین مساحت قسمتی از سطح مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که توسط استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ جدا می‌شود (فرض شود که $a > 0$).

۷.۷. فرض کنید S سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ ($0 < z$) است. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F} = -2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ و این سطح تحقیق کنید.

۸.۷. با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال سطح نوع دوم $\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ را برای میدان برداری $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ و سطح S خارجی مکعب $|x|, |y|, |z| \leq 1$ پیدا کنید.

۹.۷. فرض کنید C لبه ناحیه‌ای بسته، هموار و ساده به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ باشد. مطلوب است محاسبه مقدار انتگرال خط $\oint_C \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}$.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۷ در صفحه ۷۶، مساله ۲.۷ در صفحه ۷۶، مساله ۳.۷ در صفحه ۷۷، مساله ۴.۷ در صفحه ۷۷، مساله ۵.۷ در صفحه ۷۸، مساله ۶.۷ در صفحه ۷۹، مساله ۷.۷ در صفحه ۸۰، مساله ۸.۷ در صفحه ۸۱، مساله ۹.۷ در صفحه ۸۱ است.

امتحان هشتم

۱.۸. پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را بر کل $\mathbb{R}^2$ بررسی کنید.

۲.۸. اگر $x = te^t$ ، $y = e^t \sin t$ و $z = e^t \cos t$ ، معادلات پارامتری مسیر حرکت ذره متحرکی باشند، آنگاه بردارهای $\mathbf{T}$ و انحناء κ مسیر و معادله صفحه قائم به آن را در لحظه $t = 0$ بیابید.

۳.۸. حجم جسم محصور شده به رویه‌های $z = 18 - x^2 - 9y^2$ و $z = x^2 + 9y^2$ را بیابید.

۴.۸. نقطه‌ای بر سطح $z = xy + 1$ چنان بیابید که نسبت به مبداء مختصات دارای کوتاهترین فاصله باشد.

۵.۸. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ که در آن U دوزنقه‌ای با رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(0, 2)$ واقع در صفحه xOy است.

۶.۸. مشتق سویی (جهتدار) تابع $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ را در نقطه دلخواهی از سطح $xy + yz + zx = 0$ و در امتداد $\text{grad}(f)$ بیابید.

۷.۸. مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ که S سطح جسم حاصل از تلاقی استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = a$ است.

۸.۸. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ در صورتی تحقیق کنید که C مرز قسمت جدا شده از صفحه $x + y + z = 1$ توسط صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 0$ باشد.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۸ در صفحه ۸۳، مساله ۲.۸ در صفحه ۸۴، مساله ۳.۸ در صفحه ۸۴، مساله ۴.۸ در صفحه ۸۵، مساله ۵.۸ در صفحه ۸۶، مساله ۶.۸ در صفحه ۸۷، مساله ۷.۸ در صفحه ۸۷، مساله ۸.۸ در صفحه ۸۹ است.

امتحان نهم

۱.۹. معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط متقاطع زیر باشند:

$$\ell_1 : \begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0, \end{cases} \quad \ell_2 : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}.$$

۲.۹. پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + e^y)/(x-1) & x > 1 \\ 1/(x+1) & x > -1 \\ 0 & |x| \leq 1 \end{cases}$$

را در کلیه نقاط صفحه مختصات بررسی کنید.

۳.۹. فرض کنید $z = x^3 + y^3$ ، $x^2 + y^2 = t$ و $2x + 3y = t^3$ ، مطلوب است محاسبه dz/dt .

۴.۹. بردارهای سرعت، شتاب و نیز انحنای تاب منحنی مسیر حرکت یک نقطه مادی به معادله

$$C : \mathbf{r}(t) = (\tan t, t, 2t^2 + \tan t); \quad t \in [0, \pi/4],$$

را در لحظه شروع حرکت بیابید.

۵.۹. کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ به وسیله رویه $x^2 + z^2 = 6y$ قطع شده است. اولاً حجم و سطح جسم پیدا کند که درون هر دو سطح قرار گرفته باشد. ثانیاً گشتاور ماند (مان اینرسی) جسم مورد نظر را نسبت به محور y ها به دست آورید در صورتیکه بدانیم جرم مخصوص هر نقطه از ناحیه مقدار ثابت ۱ باشد.

۶.۹. مطلوب است $\int_C (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz$ که در آن C مارپیچ

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht/2\pi, \quad t \in [0, 2\pi],$$

است و h عدد ثابتی است.

۷.۹. مطلوب است محاسبه سطح قسمتی از رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ که در بالای صفحه xOy واقع شده است.

۸.۹. منحنی C از تلاقی صفحه $z = 5 - 2x - 2y$ و سطح $z = -x^2 - y^2 + 4$ حاصل شده است. اگر $\mathbf{F} = (x, y, z + x)$ ، آنگاه مطلوب است محاسبه $W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ و تحقیق قضیه استوکس بر یکی از سطوح محدود شده مذکور به منحنی C .

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۹ در صفحه ۹۱، مساله ۲.۹ در صفحه ۹۱، مساله ۳.۹ در صفحه ۹۲، مساله ۴.۹ در صفحه ۹۳، مساله ۵.۹ در صفحه ۹۳، مساله ۶.۹ در صفحه ۹۶، مساله ۷.۹ در صفحه ۹۷، مساله ۸.۹ در صفحه ۹۷ است.

امتحان دهم

۱.۱۰. معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $P(1, 2, 3)$ گذشته و موازی صفحه قائم بر رویه‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و $3x - y - 5y^2 = 7$ در نقطه $P_0(1, 0, -1)$ باشد.

۲.۱۰. بردارهای سرعت و شتاب و مقدار شعاع انحناء منحنی

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, \sin(e^t + 1), \cos(e^t + 1)),$$

را به ازای $t = 0$ بیابید.

۳.۱۰. تابع $z = \ln(x + 1/y)$ در کدام نقاط پیوسته نیست، نقطه‌ای را تعیین کنید که گرادیان این تابع در این نقطه برابر بردار $\mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}$ باشد، همچنین $\text{div}(\text{grad}(z))$ را محاسبه کنید.

۴.۱۰. گشتاور ماند ناحیه D داخل بیضی به معادله $x^2 + y^2/4 = 1$ با چگالی ثابت k نسبت به محور z ها را بیابید.

۵.۱۰. مطلوبست محاسبه $I = \iiint_V z^2 dx dy dz$ که در آن ناحیه V محصور به کره‌های توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ می‌باشد.

۶.۱۰. انتگرال سطح $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ که در آن S کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است را محاسبه کنید.

۷.۱۰. درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F} = (x + y, z, y)$ و سطح S که قسمتی از سطح $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ محدود به صفحه $z = 2$ است، تحقیق کنید.

۸.۱۰. با استفاده از قضیه گرین انتگرال $\int_C (y^2 - x) dy + (x^2 + 2xy) dx$ را محاسبه کنید، که در آن، C منحنی حاصل از تلاقی $z = -x^2 - y^2 + 5$ با صفحه xOy است (و جهت انتگرال‌گیری در جهت مثلثاتی است).

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۰ در صفحه ۱۰۰، مساله ۲.۱۰ در صفحه ۱۰۰، مساله ۳.۱۰ در صفحه ۱۰۱، مساله ۴.۱۰ در صفحه ۱۰۲، مساله ۵.۱۰ در صفحه ۱۰۲، مساله ۶.۱۰ در صفحه ۱۰۳، مساله ۷.۱۰ در صفحه ۱۰۴، مساله ۸.۱۰ در صفحه ۱۰۵ است.

امتحان یازدهم

۱.۱.۱. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبداء مختصات بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y^2)^2 + x^2}{(x+y^2)^2 - x^2} & (x+y^2)^2 \neq x^2 \\ 0 & (x+y^2)^2 = x^2 \end{cases}$$

۲.۱.۱. اگر $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right) = 0$ آنگاه k را طوری بیابید که $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = kz$.

۳.۱.۱. مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xy^2$ را در نقطه $P_0(2, 0, 3)$ و در امتداد بردار یکه $\mathbf{u} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ بیابید.

۴.۱.۱. معادله خط مماس بر محل تقاطع سطح $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ با صفحه $x = 1$ را در نقطه $P_0(1, 2\sqrt{3}, -3)$ بیابید.

۵.۱.۱. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^\pi \left[\int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy \right] dx$.

۶.۱.۱. اگر V ناحیه بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ باشد، آنگاه مطلوب است محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint_V \exp((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}) dV$.

۷.۱.۱. مساحت سطح جدا شده از مخروط $x^2 = y^2 + z^2$ به وسیله صفحات مختصات، $x = 1$ و $x = 2$ را بیابید.

۸.۱.۱. اگر $\mathbf{F} = \frac{y^2}{2}\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ و سطح S قسمتی از بیضی گون $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ باشد که $z \geq 0$ ، درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}$ و سطح S تحقیق کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱.۱ در صفحه ۱۰۶، مساله ۲.۱.۱ در صفحه ۱۰۶، مساله ۳.۱.۱ در صفحه ۱۰۷، مساله ۴.۱.۱ در صفحه ۱۰۷، مساله ۵.۱.۱ در صفحه ۱۰۷، مساله ۶.۱.۱ در صفحه ۱۰۸، مساله ۷.۱.۱ در صفحه ۱۰۸، مساله ۸.۱.۱ در صفحه ۱۰۹ است.

امتحان دوازدهم

۱.۱۲. معادله صفحه‌ای را بنویسید که بر صفحه $x+y-2z=1$ عمود بوده و از محل تقاطع دو صفحه $x-z=1$ و $y+2z=3$ بگذرد.

۲.۱۲. صفحه مماس بر بیضی‌گون $x^2+2y+z^2=1$ را طوری بیابید که موازی $x-y+2z=0$ باشد.

۳.۱۲. در پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبدا مختصات بحث کنید:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

۴.۱۲. تابع پتانسیل میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

را در صورت وجود بیابید و کار انجام شده توسط این نیرو را در طول خط $x=y=z$ از نقطه $(1,1,1)$ تا نقطه $(2,2,2)$ بیابید.

۵.۱۲. هرگاه $\mathbf{F} = \frac{y^2}{2}\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ و S سطح $x^2+y^2+z^2=4$ با فرض $z \geq 0$ باشد، آنگاه درستی قضیه استوکس را برای $\mathbf{F}$ و S تحقیق کنید.

۶.۱۲. درستی یا عدم درستی قضیه گرین را برای میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{k},$$

بر ناحیه D محصور بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ تحقیق کنید.

۷.۱۲. انتگرال دوگانه $\int_0^1 \left[\int_0^1 |x-y| dy \right] dx$ را حساب کنید.

۸.۱۲. درستی قضیه دیورژانس را برای سطح $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ تحقیق کنید، که در آن a عددی حقیقی و مثبت است.

۹.۱۲. مختصات مرکز ثقل نیمکره همگن $x^2+y^2+z^2=R^2, z \geq 0$ را با فرض $\delta=1$ و $R>0$ محاسبه کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۲ در صفحه ۱۱۱، مساله ۲.۱۲ در صفحه ۱۱۱، مساله ۳.۱۲ در صفحه ۱۱۲، مساله ۴.۱۲ در صفحه ۱۱۲، مساله ۵.۱۲ در صفحه ۱۱۳، مساله ۶.۱۲ در صفحه ۱۱۴، مساله ۷.۱۲ در صفحه ۱۱۶، مساله ۸.۱۲ در صفحه ۱۱۶، مساله ۹.۱۲ در صفحه ۱۱۷ است.

امتحان سیزدهم

۱.۱۳. فرض کنید R ناحیه مثلثی شکل با رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0,1)$ باشد. انتگرال

$$\iint_R \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy,$$

را محاسبه کنید.

۲.۱۳. انتگرال $\int_C xy dx + yz dy + zx dz$ را محاسبه کنید. C آن قسمت از فصل مشترک $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $z = x$ در طرفی از صفحه xOz واقع است که $y > 0$.

۳.۱۳. درستی قضیه دیورژانس (یا واگرایی) برای میدان برداری نیروی

$$\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k},$$

و سطح خارجی حجم محدود به $x^2 + y^2 - 4 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ را بررسی کنید.

۴.۱۳. مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I = \oint_C x^2 y^3 dx + dy + z dz,$$

با استفاده از قضیه استوکس، که در آن C دایره حاصل از برخورد استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $z = 2$ است ($\mathbf{n}$ را در جهت z های منفی در نظر بگیرید).

۵.۱۳. گشتاور ماند (مانان اینرسی) جسمی که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین به مخروط $3z^2 = x^2 + y^2$ محدود می‌باشد را نسبت به مبداء بیابید، مشروط به اینکه تابع چگالی $\delta = \exp((x^2 + y^2 + z^2)^{5/2})$ باشد.

۶.۱۳. فقط به یکی از دو قسمت زیر پاسخ دهید:

الف) فرض کنید C شامل قوس نیم دایره بالایی دایره واحد از صفحه xOy به همراه بازه $[-1; 1]$ از محور x باشد. در این صورت، درستی قضیه گرین را برای انتگرال $\oint_C \exp(x^2) dx + x dy$ تحقیق کنید.

ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ذیل را تعیین کرده و آنرا فطری کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -15 \\ -3 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۳ در صفحه ۱۱۹، مساله ۲.۱۳ در صفحه ۱۲۰، مساله ۳.۱۳ در صفحه ۱۲۱، مساله ۴.۱۳ در صفحه ۱۲۲، مساله ۵.۱۳ در صفحه ۱۲۳، مساله ۶.۱۳ در صفحه ۱۲۴ است.

امتحان چهاردهم

۱.۱۴. نشان دهید حد تابع زیر در $(0,0)$ وجود ندارد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{|x|^3+2|y|^3} & \text{اگر } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

۲.۱۴. فرض کنید $u = f\left(x + \frac{y}{z}, y + \frac{x}{t}\right)$ رابطه‌ای بدون حضور f بین u و مشتقاتش بیابید.

۳.۱۴. فرض کنید C یک فنر به ضابطه

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t); \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

است. کنج فرنه، انحنا و تاب آنرا در نقطه $X_0 = (-4, 0, 3\pi)$ بیابید.

۴.۱۴. فرض کنید C همچون مسأله ۳ باشد و نقطه $(x,y,z) \in C$ دارای چگالی جرمی $z\sqrt{x^2+y^2}$ است. جرم C را محاسبه کنید.

۵.۱۴. متوسط تابع $f = |x| + |y|$ بر حلقه لوزوی $1 \leq |x| + |y| \leq 4$ را محاسبه کنید.

۶.۱۴. اگر نقطه به مختصات (x,y,z) از کره توپر $x^2+y^2+z^2 \leq 4z$ دارای چگالی جرمی $2z/(x^2+y^2)$ باشد، گشتاور ماند این جسم حول محور z ها را محاسبه کنید.

۷.۱۴. فرض کنید Ω هرم محدود به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ است و S سطح خارجی آن می‌باشد. فضاچه گاوس را برای رویه S و میدان برداری $\mathbf{F} = (3z, y, 2x)$ تحقیق کنید.

۸.۱۴. انتگرال $\mathbf{F} = (z, x, x)$ را بر مسیر در شکل ۲۶.۲- (ب) محاسبه کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۴ در صفحه ۱۲۷، مساله ۲.۱۴ در صفحه ۱۲۷، مساله ۳.۱۴ در صفحه ۱۲۸، مساله ۴.۱۴ در صفحه ۱۲۸، مساله ۵.۱۴ در صفحه ۱۲۹، مساله ۶.۱۴ در صفحه ۱۳۰، مساله ۷.۱۴ در صفحه ۱۳۰، مساله ۸.۱۴ در صفحه ۱۳۱ است.

امتحان پانزدهم

۱.۱۵. در پیوستگی تابع زیر بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + (x+y)^2} & (x, y) \leq (0, 0) \\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۲.۱۵. نشان دهید که اگر $f(x - yz, y - xz) = 0$ و f تابعی دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه

$$z = \frac{1 - xz_y - yz_x}{1 + xz_x + yz_y}.$$

۳.۱۵. ثابت کنید که منحنی زیر بر یک کره واقع است:

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t) ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

۴.۱۵. با تعویض ترتیب حدود، انتگرال بگیرید $\int_0^{12} \left[\int_{-\sqrt{y/3}}^{\sqrt{y/3}} e^{x^3 - 12x} dx \right] dy$.

۵.۱۵. قضیه گرین را برای مرز ناحیه $D : 0 \leq x, 0 \leq y, x + 2y \leq 2$ و میدان برداری $\mathbf{F} = (y^2, x^2)$ تحقیق کنید.

۶.۱۵. اگر $\Omega : |x| + |y| + |z| \leq 1$ و چگالی نقطه به مختصات (x, y, z) از Ω برابر $|z|$ باشد جرم Ω را محاسبه کنید.

۷.۱۵. فرض کنید Ω ناحیه محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $z = 4$ واقع در یک هشتم اول است و S سطح خارجی آن و $\mathbf{n}$ بردار برونسوی S می باشد. انتگرال میدان برداری زیر را بر S محاسبه کنید:

$$\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + (4x^2y^3)\mathbf{k}.$$

۸.۱۵. مطلوبست انتگرال $\mathbf{F}$ بر C ، در صورتی که

$$C : \mathbf{r}(t) = (a \sin^2 t, a \sin^2 t, a \cos^2 t); 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\mathbf{F} = (y + z, z + x, x + y) \text{ و}$$

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱ در صفحه ۳۶، مساله ۲.۱۵ در صفحه ۱۳۲، مساله ۳.۱۵ در صفحه ۱۳۳، مساله ۴.۱۵ در صفحه ۱۳۳، مساله ۵.۱۵ در صفحه ۱۳۳، مساله ۶.۱۵ در صفحه ۱۳۴، مساله ۷.۱۵ در صفحه ۱۳۵، مساله ۸.۱۵ در صفحه ۱۳۶ است.

امتحان شانزدهم

۱.۱۶. فاصله دو خط $\ell_1: x+2y=3, y+2z=3$ و $\ell_2: x+y+z=6, x-2z=-5$ را بیابید.

۲.۱۶. تنها به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید:

الف) با فرض اینکه $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ ، $C: \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ معادله دایره بوسان (خمیدگی) منحنی C را در $t = 1$ بدست آورید.

ب) کنج فرنة منحنی $\mathbf{r}(t) = (t-1, t^2, t^3 - t^2)$ را در نقطه $t = 1$ بس بیابید.

۳.۱۶. در پیوستگی تابع $f(x, y)$ بر $\mathbb{R}$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} & \text{اگر } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴.۱۶. فرض کنید $u = f(x, y)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد طوری که n ای وجود داشته باشد که بازاً هر x, t و y داشته باشیم $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. در این صورت نشان دهید:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f.$$

۵.۱۶. فرض کنید D ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy = 1$ و $xy = 9$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$ واقع در ربع اول باشد و $f = \sqrt{y/x} + \sqrt{xy}$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

۶.۱۶. فرض کنید Ω قسمتی از نیم فضای بالایی باشد که توسط مخروط $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ جدا شده است. اگر تابع چگالی حجمی Ω به صورت $\delta = \exp(x^2 + y^2 + z^2)^2$ باشد، گشتاور جرم (اول) آن را نسبت به مبدا مختصات محاسبه کنید.

۷.۱۶. فرض کنید $(e^{\sqrt{xyz}})^{3/4} \sin(e^{\sqrt{xyz}})$ و $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/4} \sin(e^{\sqrt{xyz}})$ بردار قائم برونسوی پوسته بیضوی S به معادله $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ با $0 \leq z$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) d\sigma$ را محاسبه کنید.

۸.۱۶. اگر $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} - 2yz\mathbf{k}$ و S سطح خارجی جسم محدود به سهمی‌گون بیضوی $y = x^2 + z^2$ و استوانه $x^2 + z^2 = 9$ باشد، انتگرال $\mathbf{F}$ بر S را بیابید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۶ در صفحه ۱۳۸، مساله ۲.۱۶ در صفحه ۱۳۸، مساله ۳.۱۶ در صفحه ۱۳۹، مساله ۴.۱۶ در صفحه ۱۴۰، مساله ۵.۱۶ در صفحه ۱۴۰، مساله ۶.۱۶ در صفحه ۱۴۱، مساله ۷.۱۶ در صفحه ۱۴۲، مساله ۸.۱۶ در صفحه ۱۴۳ است.

امتحان هفدهم

۱.۱۷. نشان دهید که منحنی $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 9t, 3t - 3t^2, 2t^2 - 3t + 5)$ مسطحه است و سپس معادله صفحه‌ای که منحنی بر آن قرار دارد را بیابید.

۲.۱۷. فرض کنید $w = f(x, y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $x = u + v$ و $y = uv^2$ در این صورت $\partial^2 w / \partial u \partial v$ را محاسبه کنید.

۳.۱۷. نشان دهید که تابع

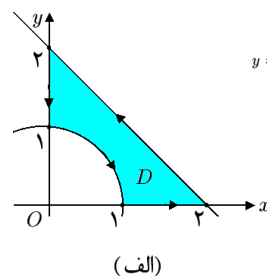
$$f(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases} \text{ اگر}$$

در مبداء پیوسته است و مشتقات جزئی آن نیز در مبداء وجود دارند، در حالی که این تابع در مبداء مشتق‌پذیر نیست.

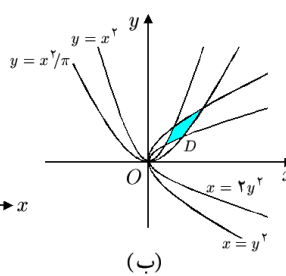
۴.۱۷. اکسترمومهای موضعی تابع $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ را بیابید.

۵.۱۷. فرض کنید D ناحیه محدود به چهار سهمی $x^2 = \pi y$ ، $2x^2 = \pi y$ ، $x^2 = y^2$ و $y^2 = x$ است و چگالی نقطه به مختصات (x, y) از D برابر $\sin(xy)/y$ می‌باشد. گشتاور D حول محور y ها را محاسبه کنید.

۶.۱۷. قضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = (-y^3, x^3)$ و منحنی نشان داده شده در شکل ۱.۱-الف) تحقیق کنید.



(الف)



(ب)

شکل ۱.۱:
(الف) مسأله ۶
از امتحان هفدهم
(ب) مسأله ۴
از امتحان هفدهم

۷.۱۷. فرض کنید

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - y^4 + z^5, y^3 - z^4 + x^5, z^3 - x^4 + y^5),$$

و S سطح خارجی $\Omega : |x| + |y| + |z| \leq 1$ باشد. انتگرال $\mathbf{F}$ بر S را محاسبه کنید.

۸.۱۷. فرض کنید S قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ است که به صفحات $z = a$ و $z = 0$ محدود شده است و $\mathbf{n}$ بردار یکه قائم بر سطح است که رو به خارج از آن دارد. قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz, 2 - x + 3y, x^2 + z)$ و رویه S تحقیق کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۷ در صفحه ۱۴۵ ، مساله ۲.۱۷ در صفحه ۱۴۵ ، مساله ۳.۱۷ در صفحه ۱۴۵ ، مساله ۴.۱۷ در صفحه ۱۴۷ ، مساله ۵.۱۷ در صفحه ۱۴۸ ، مساله ۶.۱۷ در صفحه ۱۴۹ ، مساله ۷.۱۷ در صفحه ۱۵۰ ، مساله ۸.۱۷ در صفحه ۱۵۱ است.

امتحان هجدهم

۱.۱۸. مقدار دترمینان زیر را بازاء هر $n \in \mathbb{N}$ ای بدست آورید:

$$a_n := \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

۲.۱۸. قرینه نقطه $P = (2, -5, 7)$ نسبت به خط $z = \frac{y-1}{2} = \frac{x+3}{2}$ را بیابید.

۳.۱۸. با فرض این که

$$f(x, y) = \begin{cases} y + x \sin(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که

الف) حد $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ وجود دارد؛

ب) حد $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ وجود دارد؛ در حالی که

ج) حد $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ وجود ندارد.

۴.۱۸. با فرض $u = x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$ ، ثابت کنید $xu_x + \alpha yu_y + \beta zu_z = nu$.

۵.۱۸. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\text{الف) } \int_0^2 \left[\int_x^2 [x+y] dy \right] dx \quad \text{ب) } \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin(x^2) dy \right] dx.$$

۶.۱۸. متوسط تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$ بر مجموعه $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ را محاسبه کنید.

۷.۱۸. در صورتی که $C : \max\{|x|, |y|\} = a, z = 1$ و نقطه (x, y, z) از C دارای چگالی جرم $f = |xyz|$ باشد، گشتاور ماند C حول $-z$ محور را محاسبه کنید.

۸.۱۸. از تابع $\mathbf{F} = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$ بر سطح خارجی جسم

$$\Omega : |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| \leq 1,$$

انتگرال بگیرید.

۹.۱۸. از میدان برداری $\mathbf{F} = (x, x+y, x+y+z)$ بر منحنی زیر انتگرال بگیرید:

$$C : \mathbf{r}(t) = (a \sin t, a \cos t, a \sin t + a \cos t) ; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۸ در صفحه ۱۵۴، مساله ۲.۱۸ در صفحه ۱۵۴، مساله ۳.۱۸ در صفحه ۱۵۵، مساله ۴.۱۸ در صفحه ۱۵۶، مساله ۵.۱۸ در صفحه ۱۵۶، مساله ۶.۱۸ در صفحه ۱۵۷، مساله ۷.۱۸ در صفحه ۱۵۸، مساله ۸.۱۸ در صفحه ۱۵۸، مساله ۹.۱۸ در صفحه ۱۵۹ است.

امتحان نوزدهم

۱.۱۹. تنها به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید:

الف) اگر z تابعی از x و y بوده و u و v دو متغیر دیگر باشند به نحوی که $u = \ell x + my$ و $v = -mx + \ell y$ درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\ell^2 + m^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

ب) اگر f و g توابع مشتق پذیر بوده و z تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشند به گونه‌ای که $f(x, y, z) = 0$ و $g(x, y, z) = 0$ در این صورت نشان دهید:

$$\frac{dx}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}.$$

۲.۱۹. سه خط d_1 ، d_2 و d_3 با بردارهای هادی به ترتیب

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

از مبدا می‌گذرند. ابتدا نشان دهید که این سه خط روی یک صفحه قرار دارند و سپس معادله این صفحه را بنویسید.

۳.۱۹. در پیوستگی تابع زیر بر کل $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ اگر}$$

۴.۱۹. مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید که توسط استوانه به معادله

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1,$$

بریده می‌شود. در آن a و b اعداد مثبتند.

۵.۱۹. قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که توسط صفحه $z = 1$ محدود شده است و نیز قسمتی از صفحه $z^2 = x^2 + y^2$ بریده شده است را S می‌نامیم و فرض می‌کنیم که

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}.$$

در این صورت درستی قضیه دیورژانس (= واگرایی) را برای رویه S و میدان $\mathbf{F}$ تحقیق کنید.

۶.۱۹. مطلوبست محاسبه کار انجام شده بوسیله نیروی $(=)$ میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + \cos y - y \sin x)\mathbf{i} + (2x + \cos x - x \sin y)\mathbf{j}.$$

که متحرکی را در جهت مثبت روی مسیر بسته C مطابق شکل ۳۵.۲- (الف) جابجا می‌کند.

۷.۱۹. فرض کنیم $0 < a \leq b$. گشتاور ماند جسم واقع بین کره‌های

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

حول مبدا مختصات را در صورتی بیابید که چگالی حجمی این جسم با فاصله هر نقطه (x, y, z) تا مبدا مختصات برابر باشد.

۸.۱۹. اگر $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z+3)\mathbf{k}$ و S سطح بسته محدود به صفحات مختصاتی، $x=1$ و $y=1$ و نیز سطح هموار دلخواه S نشان داده شده در شکل ۳۵.۲- (ب) باشد، مطلوبست محاسبه شار $\mathbf{F}$ بر S .

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۱۹ در صفحه ۱۶۱، مساله ۲.۱۹ در صفحه ۱۶۲، مساله ۳.۱۹ در صفحه ۱۶۳، مساله ۴.۱۹ در صفحه ۱۶۳، مساله ۵.۱۹ در صفحه ۱۶۴، مساله ۶.۱۹ در صفحه ۱۶۵، مساله ۷.۱۹ در صفحه ۱۶۶، مساله ۸.۱۹ در صفحه ۱۶۶ است.

امتحان بیستم

۱.۲۰. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از خط $3x+z=1$, $3y+z=10$ ℓ می‌گذرد و بر رویه $S: x^2+y+z=3$ مماس است.

۲.۲۰. بردار یکه مماس بر مسیر حرکت متحرکی که با قانون زیر حرکت می‌کند را در لحظه $t = \sqrt{\pi}/2$ بدست آورید:

$$x = 3 \int_0^t \sin(u^2) du, \quad y = 5 \int_0^t \cos(u^2) du, \quad z = 4 \int_0^t \sin(u^2) du.$$

سپس مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ را در امتداد این بردار و در نقطه $X_0 = (1, 4, 1/2)$ محاسبه کنید.

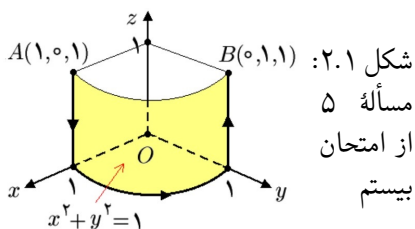
۳.۲۰. فرض کنید $f(u,v,w)$ تابعی مشتق‌پذیر است و $f(x-y, y-z, z-x) = 0$ در این صورت، مقدار عبارت $1 - x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

۴.۲۰. مساحت آن قسمت از سطح $S: z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ که توسط رویه‌های

$$S_1: x^2+y^2=1, \quad S_2: x^2+y^2=4,$$

جدا شده است و در یک هشتم اول قرار دارد را محاسبه کنید.

۵.۲۰. متحرکی بر مسیر نشان داده شده در شکل ۲.۱-۴ (الف) حرکت می‌کند. کار انجام شده توسط این متحرک تأثیر میدان برداری $\mathbf{F} = (yz-2x)\mathbf{i} + (xz-2y)\mathbf{j} + (xy-2z)\mathbf{k}$ را محاسبه کنید.



۶.۲۰. فرض کنید رویه S سطح خارجی جسم محدود به نیم کره $z = 2 + \sqrt{4-x^2-y^2}$ و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ باشد. به کمک قضیه دیورژانس از میدان برداری $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ بر سطح خارجی S انتگرال بگیرید.

۷.۲۰. مقدار کار انجام شده توسط متحرکی که بر منحنی بسته

$$C: x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2+z=1,$$

حرکت می‌کند و تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F} = (x^2y, -y^3, 3)$ قرار دارد را یک بار مستقیم، و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

۸.۲۰. تنها به یکی از دو مورد زیر پاسخ دهید:

الف) رویه درجه دوم $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + x - y = 0$ را به شکل کانونی تبدیل کرده، نوع آن را مشخص کنید.

ب) ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر به ماتریس

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

را بدست آورده و سپس آن را قطری کنید.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۲۰ در صفحه ۱۶۸، مساله ۲.۲۰ در صفحه ۱۶۸، مساله ۳.۲۰ در صفحه ۱۶۹، مساله ۴.۲۰ در صفحه ۱۶۹، مساله ۵.۲۰ در صفحه ۱۷۰، مساله ۶.۲۰ در صفحه ۱۷۱، مساله ۷.۲۰ در صفحه ۱۷۲، مساله ۸.۲۰ در صفحه ۱۷۳ است.

امتحان بیست و یکم

۱.۲۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. فرمولی کلی برای A^n که n عددی طبیعی است، بدست آورید.

۲.۲۱. فرض کنید صفحه $x+y+z=1$ را با مخروط $x^2+y^2=z^2$ برخورد داده و منحنی حاصل را بر صفحه xOy تصویر کنیم. ضمن تعیین معادله این منحنی، نوع آن را مشخص کرده و آن را ترسیم کنید.

۳.۲۱. در پیوستگی تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y}{x^2+y^4} & \text{اگر } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

۴.۲۱. در صورتی که $xyz = x^2 + 2z^2$ ، مطلوبست $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1,1)}$.

۵.۲۱. در صورتی که نقطه (x,y) از جسم تخت محدود به منحنیهای $x^2y=1$ ، $x^2y=2$ ، $xy^2=1$ و $xy^2=2$ دارای چگالی جرمی $\delta(x,y) = x^5y^5$ باشد، جرم آن را بدست آورید.

۶.۲۱. فرض کنید Ω جسم بسته به ضابطه $x^2+y^2 \leq \sin z$ با $0 \leq z \leq \pi$ است. در صورتی که نقطه (x,y,z) از آن دارای چگالی جرمی z باشد، گشتاور ماند آن حول z -محور را بدست آورید.

۷.۲۱. فرض کنید C اجتماع نمودار تابع $r = \theta$ با $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و پاره خط از $(0,0)$ تا $(0,2\pi)$ در صفحه xOy است. انتگرال میدان برداری $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ را بر C با جهت مثلثاتی، محاسبه کنید.

۸.۲۱. فرض کنید $\mathbf{F} = (z^3, y^3, x^3)$ و S قسمتی از نیمه بالایی کره $2z = x^2 + y^2 + z^2$ است که در نیم فضای $0 \leq x$ قرار دارد و بردار $\mathbf{n}$ بر S رو به بالا جهت دارد. مطلوبست محاسبه انتگرال میدان برداری $\text{Curl}(\mathbf{F})$ بر لبه S به کمک قضیه استوکس.

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۲۱ در صفحه ۱۷۶، مساله ۲.۲۱ در صفحه ۱۷۷، مساله ۳.۲۱ در صفحه ۱۷۷، مساله ۴.۲۱ در صفحه ۱۷۸، مساله ۵.۲۱ در صفحه ۱۷۸، مساله ۶.۲۱ در صفحه ۱۷۹، مساله ۷.۲۱ در صفحه ۱۷۹، مساله ۸.۲۱ در صفحه ۱۸۰ است.

امتحان بیست و دوم

۱.۲۲. نوع رویه درجه دوم $x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 2yz = k$ را به ازای مقادیر مختلف k مشخص کنید.^۱

۲.۲۲. فرض کنید C فصل مشترک رویه‌های $xy + z = 1$ و $x^2 + y + z = 2$ باشد. برای این منحنی بردارهای $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ و مقدار انحناء را در نقطه $(2, 3, -5)$ بیابید.

۳.۲۲. معادله صفحه مماس بر رویه $z = xy$ و عمود بر خط $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ را بنویسید.

۴.۲۲. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر مفروض است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) آیا f در مبدا پیوسته است؟

ب) آیا $\partial f / \partial x$ در مبدا پیوسته است؟

ج) مشتق جهتی f در مبدا و در امتداد بردار یک دلخواه $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ را بدست آورید.

۵.۲۲. فرض کنید $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $z = f(x, y)$, $u^3 + 2v^3 = z$, $u^2 + v^2 = x$ و $u + v = y$. مطلوب است محاسبه $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$.

۶.۲۲. مطلوب است محاسبه اکستریمومهای نسبی و مطلق تابع $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2$ بر ناحیه $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

۷.۲۲. انتگرال زیر را حل کنید:

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} e^{(x^2+y^2)} dx \right] dy + \int_{\sqrt{3}/2}^{3/2} \left[\int_{\sqrt{3y/3}}^{\sqrt{3-y^2}} e^{(x^2+y^2)} dx \right] dy.$$

۸.۲۲. انتگرال زیر را در ناحیه ω که محدود به رویه‌های $y = 2x^2 + 2z^2$ و $y = 8$ است محاسبه کنید:

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz.$$

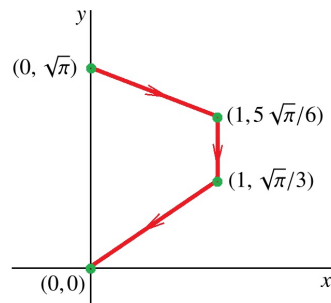
۹.۲۲. گشتاور ماند سطح $|x| + |y| + |z| = 1$ با چگالی ۱ در دوران حول مبدا مختصات محاسبه کنید.

۱۰.۲۲. کار میدان برداری

$$\mathbf{F} = (ye^{xy} \cos(x^2 - y^2) - 2xe^{xy} \sin(x^2 - y^2), xe^{xy} \cos(x^2 - y^2) + 2ye^{xy} \sin(x^2 - y^2)),$$

در جابجایی یک متحرک روی مسیر در شکل ۳.۱ را محاسبه نمایید.

^۱ شش سوال اول مربوط به میان ترم است و ما بقیه مربوط به پایان ترم.



شکل ۳.۱: منحنی در
مساله ۱۰ از امتحان ۲۲

۱۱.۲۲. شار عبوری میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2 \sin^2 z, y + z^4 \sinh x, z^3 + 3z(x^2 + y^2)).$$

از نیمه بالایی کره به مرکز مبدا و شعاع یک را در جهت $\mathbf{n}$ رو به بالا بیابید.

۱۲.۲۲. مقدار انتگرال $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ را با استفاده از قضیه استوکس در صورتی محاسبه کنید که C بیضی حاصل از برخورد صفحه $z = 2$ و استوانه $x^2/4 + y^2/9 = 1$ و با جهت مثبت مثلثاتی است و

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + e^x, 2yz + e^y, 2xz + e^z).$$

یادداشت: پاسخ مساله ۱.۲۲ در صفحه ۱۸۲، مساله ۲.۲۲ در صفحه ۱۸۲، مساله ۳.۲۲ در صفحه ۱۸۳، مساله ۴.۲۲ در صفحه ۱۸۳، مساله ۵.۲۲ در صفحه ۱۸۴، مساله ۶.۲۲ در صفحه ۱۸۴، مساله ۷.۲۲ در صفحه ۱۸۵، مساله ۸.۲۲ در صفحه ۱۸۶، مساله ۹.۲۲ در صفحه ۱۸۶، مساله ۱۰.۲۲ در صفحه ۱۸۷، مساله ۱۱.۲۲ در صفحه ۱۸۸، مساله ۱۲.۲۲ در صفحه ۱۸۸ است.

فصل ۲

پاسخ مسایل

پاسخ مسایل امتحان اول

۱.۱. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در مبداء مختصات بحث کنید. ۲

پاسخ: خم پیوسته $C_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ واقع در صفحه $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که $\lim_{t \rightarrow 0} C_\alpha(t) = (0, 0)$. از طرفی حد مسیری f بر مسیر C_α منتهی به مبداء عبارت است از

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(C_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5(t)(\alpha t)}{\sqrt{(t)^2 + (\alpha t)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = 0.$$

پس احتمالاً f در مبداء حد دارد. برای اثبات این حدس، لازم است ثابت کنیم که

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall (x, y) : \left(0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon \right).$$

برای این منظور، توجه می‌کنیم که $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ معادل با این گفته است که $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ و در نتیجه $|x|$ و $|y|$ هر دو (به دلیل اینکه از $\sqrt{x^2+y^2}$ کوچکترند) از δ کوچکترند. در این صورت اگر

۲ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

$z = \max\{|y|, |x|\}$ باشد، آنگاه $z < \delta$ و در نتیجه

$$\left| \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{5|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{5zz}{\sqrt{z^2+0}} = 5z < 5\delta.$$

پس کافی است δ را $\varepsilon/5$ اختیار کنیم. بنابراین، f در مبدا پیوسته است.

۲.۱. معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی C به معادله:

$$C : x^2 - 3xy + z^2 = 1, \quad 2x \tan(xz) + 2y^2 - z = 1,$$

را در نقطه $M(0, 1, 1)$ بیابید.

پاسخ: منحنی C عبارت است از مقطع دو رویه

$$S_1 : F_1 := x^2 - 3xy + z^2 = 1,$$

$$S_2 : F_2 := 2x \tan(xz) + 2y^2 - z = 1.$$

چون $\nabla F_1(M)$ بر رویه S_1 در نقطه M عمود است و $\nabla F_2(M)$ نیز در نقطه M بر S_2 عمود است، پس $\mathbf{v} = \nabla F_1(M) \times \nabla F_2(M)$ بر فصل مشترک آنها، یعنی C ، در نقطه M مماس است. اما

$$\nabla F_1(M) = (2x - 3y, -3x, 2z)|_M = (-3, 0, 2),$$

$$\nabla F_2(M) = \left(2 \tan(xz) + \frac{2xz}{\cos^2(xz)}, 4y, \frac{2x^2}{\cos^2(xz)} - 1 \right)|_M = (0, 4, -1).$$

بنابراین

$$\mathbf{v} = \nabla F_1(M) \times \nabla F_2(M)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-8, -3, -12).$$

اکنون چون صفحه قائم بر C در نقطه M صفحه‌ای است که از M می‌گذرد و بردار قائم آن $\mathbf{v}$ است، پس معادله آن عبارت از $8(x-0) + 3(y-1) + 12(z-1) = 0$ یا $8x + 3y + 12z = 15$ است. همچنین، خط مماس به C در نقطه M خطی است که از M به موازات $\mathbf{v}$ می‌گذرد، بنابراین معادله آن عبارت از $\frac{x}{8} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{12}$ یا $\frac{x-0}{-8} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-12}$ است.

۳.۱. مشتق تابع $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ را در امتداد خط مماس بر منحنی C با معادله:

$$C : x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = 2t^4,$$

در نقطه $(1, 2, -2)$ واقع بر منحنی بدست آورید.

پاسخ: ابتدا مماس $\mathbf{v}$ به C در نقطه $M = (1, 2, -2)$ را مشخص می‌کنیم. برای این منظور ابتدا باید معلوم کنیم که به ازای کدام مقادیری از t ، $C(t)$ برابر M است. یعنی $(1, 2, -2) = (t, 2t^2, 2t^4)$ یا $t = 1$. پس $\mathbf{v}$ عبارت است از

$$\mathbf{v} = C'(1) = (1, 4t, 8t^3)|_{t=1} = (1, 4, 8).$$

در این صورت، ملاحظه می‌شود که $\nabla u|_M$ برابر است با

$$\left(\frac{y^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \frac{-xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \frac{-xz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \right) \Big|_M = \left(\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27} \right),$$

و در نتیجه مشتق u در امتداد مماس به منحنی C در نقطه M برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}u(M) &= \nabla u|_M \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \left(\frac{8}{27} \right) \left(\frac{1}{9} \right) + \left(-\frac{2}{27} \right) \left(\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{2}{27} \right) \left(\frac{8}{9} \right) = \frac{16}{243}. \end{aligned}$$

۴.۱. حاصل انتگرال دوگانه $\int_0^1 \left[\int_{e^x}^e \frac{1}{\ln y} dy \right] dx$ را بعد از تغییر مرتبه محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا ناحیه مورد انتگرال، که آن را D می‌نامیم، در صفحه xOy ترسیم می‌کنیم (به شکل ۱-۲). (الف توجه شود). برای این منظور خطوط $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = e$ و منحنی $y = e^x$ را ترسیم می‌کنیم. در تعویض ترتیب حدود، مشاهده می‌شود که y بین ۱ تا e تغییر می‌کند و اگر y را بر محور y ها در نظر بگیریم، آنگاه x می‌تواند از ۰ تا $\ln y$ (چون $y = e^x$) تغییر کند. بنابراین

$$D : 0 \leq x \leq 1, \quad e^x \leq y \leq e,$$

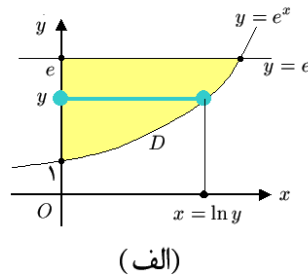
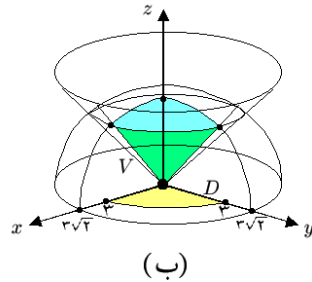
$$: 1 \leq y \leq e, \quad 0 \leq x \leq \ln y,$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_{e^x}^e \frac{dy}{\ln y} \right] dx &= \iint_D \frac{dx dy}{\ln y} = \int_1^e \left[\int_0^{\ln y} \frac{dx}{\ln y} \right] dy \\ &= \int_1^e \left[\frac{x}{\ln y} \right]_0^{\ln y} dy = \int_1^e dy = e - 1. \end{aligned}$$

۵.۱. به کمک تغییر متغیر در مختصات کروی حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy.$$



شکل ۱.۲: (الف)
مسأله ۴ از امتحان
اول (ب) مسأله ۵ از
امتحان اول

پاسخ: ابتدا توجه می‌کنیم که ناحیه مورد انتگرال عبارت است از حجم محدود میان مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ از پایین و کره $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$ از بالا که تصویر آن بر صفحه xOy عبارت است از ناحیه محدود میان خطوط $x = 0, y = 3, y = 0$ و منحنی $x = \sqrt{9 - y^2}$ (به شکل ۱.۲-ب) توجه شود.) یعنی

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2} \right\},$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2} \right\}.$$

حال چون نقاط در V داخل کره به شعاع $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ واقع هستند، در نتیجه داریم: $0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2}$. چون تصویر نقاط در V به D متعلق هستند و D ربع دایره واقع در ربع اول صفحه است، پس $0 \leq \theta \leq \pi/2$ و از طرفی اگر θ و ρ ثابت باشد، آنگاه φ چنان می‌تواند تغییر کند که در ابتدا روی مخروط باشد و در انتها روی محور z ها. اما بر سطح مخروطی داریم $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ یعنی $\rho \cos \varphi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi}$ یا $\sin \varphi = \cos \varphi$ بنابراین، بایستی $\varphi = \pi/4$. نتیجه اینکه $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ و چون $J = \rho^2 \sin \varphi$ ، پس:

$$V' = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{3\sqrt{2}} \rho^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right] d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 d\rho \right) \\ &= [\theta]_0^{\pi/2} [-\cos \varphi]_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{3\sqrt{2}} = \frac{486}{5} \pi. \end{aligned}$$

۱.۲. پاسخ مسایل امتحان اول ۴۰ فصل ۲. پاسخ مسایل

۶.۱. درستی قضیه دیورژانس (استروگراسکی) را برای میدان برداری $\mathbf{F} = 5z\mathbf{k}$ روی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۳ بررسی کنید.

پاسخ: کره مذکور به معادله $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3^2 = 0$ است. آن را به صورت دو رویه به معادلات زیر تقسیم می‌کنیم:

$$S_1 : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}; (x, y) \in D,$$

$$S_2 : z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}; (x, y) \in D,$$

که در آن $D : x^2 + y^2 \leq 9$ (به شکل ۲.۲-الف) توجه شود). در این صورت بردار قائم به S_1 عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} \\ &= \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4 \times 9}} = \pm \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right). \end{aligned}$$

چون $\mathbf{n}_1$ رو به بالا است (یعنی مؤلفه z آن مثبت است) علامت + مورد قبول است. به صورت مشابه به دلیل اینکه $\mathbf{n}_2$ رو به پایین است، $\mathbf{n}_2 = (x/3, y/3, z/3)$. بعلاوه، دیفرانسیل مساحت سطوح S_1 و S_2 عبارتند از

$$\begin{aligned} d\sigma_1 = d\sigma_2 &= \frac{\|\nabla f\|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} dx dy = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{|2z|} dx dy \\ &= \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma_1 &= \iint_D (0, 0, 5z) \cdot \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right) \frac{3 dx dy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ &= \iint_D \frac{5z^2 dx dy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \iint_D 5 \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 5 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^3 \sqrt{9 - r^2} r dr = 10\pi \left[-\frac{1}{3} (9 - r^2)^{3/2} \right]_0^3 = 90\pi. \end{aligned}$$

به صورت مشابه

$$\begin{aligned} \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 d\sigma_2 &= \iint_D (0, 0, 5z) \cdot \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right) \frac{3 dx dy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ &= \iint_D \frac{5z^2 dx dy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \iint_D 5 \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy = 90\pi. \end{aligned}$$

در نتیجه، انتگرال سطح مورد نظر برابر $180\pi + 90\pi = 180\pi$ است.
حال از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(5z)}{\partial z} = 5.$$

در نتیجه، اگر $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 3^2$ داخل S باشد، داریم

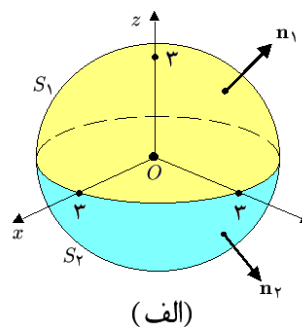
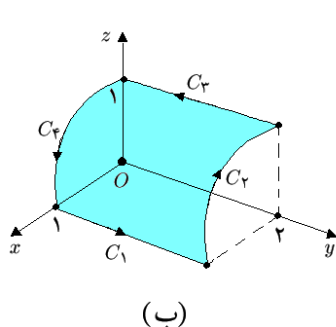
$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V 5 \, dx \, dy \, dz \\ &= 5 \operatorname{Vol}(V) = 5 \times \frac{4}{3} \pi (3)^3 = 180\pi. \end{aligned}$$

۷.۱. صحت قضیه استوکس را با فرض $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ روی سطح S ، که در آن S قسمتی از سطح $x^2 + z^2 = 1$ در یک هشتم اول و محدود به صفحه $y = 2$ است، بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا انتگرال خط $\mathbf{F}$ را بر مرز S یعنی C محاسبه می‌کنیم. همان طوری که از شکل ۲.۲- (ب) برمی‌آید، C جمع چهار منحنی C_1, C_2, C_3 و C_4 است. برای این منظور لازم است که معادلات این منحنی‌ها را به صورت پارامتری بنویسیم. توجه می‌کنیم که C_1 پاره خط از $(1, 0, 0)$ به $(1, 2, 0)$ است. بنابراین

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (1-t)(1, 0, 0) + t(1, 2, 0) = (1, 2t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

به صورت مشابه C_3 پاره خط از $(0, 2, 1)$ به $(0, 0, 1)$ است و لذا



شکل ۲.۲: (الف) مسأله ۶ از امتحان اول (ب) مسأله ۷ از امتحان اول

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (1-t)(0, 2, 1) + t(0, 0, 1) = (0, 2-2t, 1) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

منحنی C_2 عبارت از مقطع استوانه $x^2 + z^2 = 1$ با صفحه $y = 2$ است، بنابراین می‌توانید فرض کنیم $z = \sin t, x = \cos t$ در ربع اول واقع است، بنابراین

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (\cos t, 2, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

که جهت حرکت آن با مسأله ما سازگار است. زیرا

$$\mathbf{r}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2, 1), \quad \mathbf{r}_2(0) = (1, 2, 0).$$

به صورت مشابه چون C_4 مقطع استوانه $x^2 + z^2 = 1$ و $y = 0$ است، داریم

$$C_4 : \mathbf{r}_4(t) = (\sin t, 0, \cos t); \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

برای اینکه جهت حرکت C_4 عکس حرکت عقربه‌های ساعت شود، به جای $x = \cos t$ و $z = \sin t$ از $x = \sin t$ و $z = \cos t$ استفاده کرده‌ایم. اکنون محاسباتی به شرح زیر انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt \\ &= \int_0^1 (0, 4, 0) \cdot (0, 2, 0) dt = \int_0^1 8 dt = 8, \\ \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin t, 4 \cos t, 2 \sin t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 t + 2 \sin t \cos t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) + \sin^2 t \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4}, \\ \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}'_3(t) dt \\ &= \int_0^1 (1, 0, 2) \cdot (0, -2, 0) dt = 0, \\ \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_4) \cdot \mathbf{r}'_4(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos t, 4 \sin t, 2 \cos t) \cdot (\cos t, 0, -\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - 2 \cos t \sin t) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t - \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 1. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 8.$$

اکنون همین انتگرال را با استفاده از قضیه استوکس محاسبه می‌کنیم. ابتدا کرل میدان برداری F را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & 4x & 2z \end{vmatrix} \\ &= (0-0, 1-0, 4-0) = (0, 1, 4).\end{aligned}$$

چون رویه مورد نظر، که آن را S می‌نامیم، به صورت $f = x^2 + z^2 - 1 = 0$ قابل بیان است، داریم

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm \frac{(2x, 0, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 0 + 4z^2}} = \pm(x, 0, z).$$

نظر به اینکه $\mathbf{n}$ رو به بالا است، علامت + قابل قبول است. به علاوه

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\partial f/\partial z|} dx dy = \frac{\sqrt{4x^2 + 0 + 4z^2}}{|2z|} dx dy = \frac{dx dy}{z}.$$

همچنین، تصویر S بر صفحه xOy عبارت است از

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\},$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (0, 1, 4) \cdot (x, 0, z) \frac{dx dy}{z} \\ &= \iint_D 4 dx dy = 4 \text{Area}(D) = 4 \times 1 \times 2 = 8,\end{aligned}$$

که با مقدار قبلی برابر است.

۸.۱. اگر $\omega = x^2 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ ، آنگاه حاصل عبارت $x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$ برابر است با الف) 2ω ، ب) $-\omega$ ، پ) ω ، ت) -2ω ؟

پاسخ: از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم $u = y/x$ و $v = z/x$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}w_x &= 2xf + x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} f_u + \frac{\partial v}{\partial x} f_v \right) = 2xf - yf_u - zf_v, \\ w_y &= x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} f_u + \frac{\partial v}{\partial y} f_v \right) = xf_u \\ w_z &= x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} f_u + \frac{\partial v}{\partial z} f_v \right) = xf_v.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} xw_x + yw_y + zw_z &= 2x^2f - xyf_u - xzf_v + xyf_u + xzf_v \\ &= 2x^2f = 2w. \end{aligned}$$

پس گزینه (الف) صحیح است.

۹.۱. دو خط $L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{4}$ و $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{1-z}{5}$ در یک نقطه متقاطع هستند، (ب) موازی هستند، (پ) بر هم منطبق هستند، (ت) متناظر هستند

پاسخ: بردار هادی خط اول $v_1 = (2, 1, -5)$ است زیرا معادله آن را به صورت نرمال

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-5},$$

می شود بازنویسی کرد. بردار هادی خط دوم عبارت است از $v_2 = (3, 3, 4)$ که چون نسبت مختصات v_1 به v_2 برابر نیستند $(3/2 \neq 3/1 \neq -4/5)$. پس این دو خط موازی نیستند. برای اینکه بفهمیم این دو خط متقاطع هستند یا نه، آن دو را پارامتره می کنیم

$$L_1: x = 2t, y = t - 1, z = -5t + 1,$$

$$L_2: x = 3s - 1, y = 3s, z = 4s + 3.$$

و دستگاه $L_1 \cap L_2$ را حل می کنیم. ابتدا با برابر قرار دادن x و y دو خط، s و t را محاسبه می کنیم

$$\begin{cases} 2t = 3s - 1, \\ t - 1 = 3s, \end{cases} \quad \begin{cases} 6s + 2 = 3s - 1, \\ t - 1 = 3s, \end{cases} \quad \begin{cases} s = -1, \\ t = -2, \end{cases}$$

آنگاه با برابر قرار دادن x و z دو خط، s و t را محاسبه می کنیم

$$\begin{cases} 2t = 3s - 1, \\ -5t + 1 = 4s + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 10t = 15s - 5, \\ -10t = 8s + 4, \end{cases} \quad \begin{cases} t = -100/23, \\ s = 1/23. \end{cases}$$

پس دو خط مذکور غیر متقاطع هستند. چون این دو خط غیر موازی و غیر متقاطع می باشند، پس متناظر هستند و بنابراین هستند و بنابراین گزینه (ت) صحیح است.

۱۰.۱. معادله صفحه مماس بر بیضی گون $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ و موازی با صفحه $2x - 4y + 2z = 0$

عبارت است از:

(الف) $x - 2y + z = 2$ ، (ب) $x - 2y + z = 1$ ، (پ) $x - 2y + z = 3$ ، (ت) $2x - 2y + 2z = 5$

پاسخ: می دانیم گرادیان تابع معرف یک سطح، بر آن سطح عمود است پس بردار قائم بر صفحه مماس

مورد نظر عبارت است از $\mathbf{n} = \nabla f = (x, 2y, z)$ اما بایستی این صفحه با صفحه داده شده موازی باشد؛ یعنی، بایستی بردارهای قائم آن دو موازی باشند: $(2, -4, 2) \parallel (x, 2y, z)$ و این معادل است با برقراری تساوی‌های $\frac{x}{2} = \frac{2y}{-4} = \frac{z}{2}$. بنابراین $-y = x = z$ و با قرار دادن این تساوی‌ها در معادله بیضی‌گون (به دلیل اینکه بایستی نقطه پایه به سطح متعلق باشد) داریم $\frac{1}{2}z^2 + (-z)^2 + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}$ یا $z^2 = \frac{1}{4}$ و $z = \pm \frac{1}{2}$. یعنی، در دو نقطه از بیضی‌گون، صفحه داده شده موازی است: اگر $z = \frac{1}{2}$ آنگاه $X_0 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ و $\mathbf{n} = (1/2, -1, 1/2)$ ، بنابراین $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) - (y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(z - \frac{1}{2}) = 0$ یا $x - 2y + z = 2$ و اگر $z = -\frac{1}{2}$ آنگاه $X_0 = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ و $\mathbf{n} = (-1/2, 1, -1/2)$. بنابراین معادله صفحه مماس است. اگر $z = -\frac{1}{2}$ آنگاه $x - 2y + z = -2$ و $\frac{-1}{2}(x + \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{2}) = 0$ یا $x - 2y + z = -2$ معادله صفحه مماس است. پس گزینه (الف) صحیح است.

پاسخ مسایل امتحان دوم

۱.۲. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در نقطه $(0, 0)$ بحث کنید.^۱

پاسخ: اگر فرض کنیم $\mathbf{r}_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ ، آنگاه $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_\alpha(t) = (0, 0)$ و حد مسیری f بر $\mathbf{r}_\alpha$ برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)(\alpha t)^2}{(t)^2 + (\alpha t)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 t^3}{(1 + \alpha^2)t^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \lim_{t \rightarrow 0} t = 0 = f(0, 0). \end{aligned}$$

پس احتمالاً f در مبدا پیوسته است. برای نشان دادن اینکه این حدس صحیح است، باید ثابت کنیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. یعنی

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall (x, y) \left(0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \right).$$

از فرض $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ نتیجه می‌شود که $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ و چون $|x|$ و $|y|$ هر دو از سمت چپ این عبارت کوچک‌ترند، پس $|x| < \delta$ و $|y| < \delta$. بنابراین اگر z را ماکزیمم $|x|$ و $|y|$ بگیریم، آنگاه $z < \delta$. اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x||y|^2}{|x|^2 + |y|^2} < \frac{z \times z^2}{z^2 + 0^2} = z < \delta.$$

پس کافی است فرض شود $\delta = \varepsilon$. توضیح اینکه در نامساوی اول، در مخرج عبارت سمت چپ، میان $|x|^2$ و $|y|^2$ یکی برابر z^2 است، آن را نگاه داشته و بجای دیگری صفر قرار داده‌ایم. بنابراین f در $(0, 0)$ پیوسته است.

۲.۲. معادله خط مماس بر فصل مشترک دو رویه $3x^2 + y^2 - z^2 = 3$ و $x^2 + y^2 + z = 1$ را در نقطه $P(1, -1, -1)$ بدست آورید. سپس معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $M(2, 3, 4)$ گذشته و عمود بر این خط مماس باشد

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

پاسخ: به منظور ساده شدن بحث، نمادهایی به شرح زیر ارائه می‌کنیم

$$S_2 : f_2 = 3x^2 + y^2 - z^2 - 3 = 0,$$

$$S_1 : f_1 = x^2 + y^2 + z - 1 = 0.$$

حال چون منحنی مورد نظر C فصل مشترک S_1 و S_2 است، پس مماس بر آن، هم به S_1 مماس است و هم به S_2 . از طرفی $\nabla f_1(P)$ در نقطه P به S_1 و $\nabla f_2(P)$ در نقطه P به S_2 عمود است، بنابراین بایستی بردار مماس به C در نقطه P ، که آن را $\mathbf{v}$ می‌نامیم، به $\nabla f_1(P)$ و نیز به $\nabla f_2(P)$ عمود باشد. از این رو، موازی حاصل ضرب خارجی این دو گرادیان است؛ و چون طول بردار مماس در معادله خط مماس مؤثر نیست، می‌توانیم موازی بودن آن را به معنی تساوی بدانیم. به عبارت دیگر $\mathbf{v} = \nabla f_1(P) \times \nabla f_2(P)$ که در آن

$$\nabla f_1(P) = (2x, 2y, 1)|_P = (2, -2, 1),$$

$$\nabla f_2(P) = (6x, 2y, -2z)|_P = (6, -2, 2).$$

در نتیجه:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 8).$$

بنابراین خط مماس خواسته شده، خطی است که از P موازی $\mathbf{v}$ می‌گذرد. یعنی، به معادله

$$\ell : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{8},$$

است. صفحه مورد نظر، صفحه‌ای است که از M عمود به $\mathbf{v}$ (راستای ℓ) می‌گذرد. در نتیجه، بنابه تعریف $(x-2) - (y-3) - 4(z-4) = 0$ و لذا معادله آن عبارت از $x - y - 4z = -17$ است.

۳.۲. هرگاه $u = yf(x+y) + xg(x+y)$ باشد، آنگاه نشان دهید که $u_{xx} - 2u_{yx} + u_{yy} = 0$.

پاسخ: اگر فرض کنیم $t = x + y$ ، آنگاه

$$f_x = t_x f_t = 1 \times f' = f',$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = t_x (f')_t = 1 \times f'' = f''.$$

به همین نحو f_y و g_x نیز برابر f' هستند و f_{yy} ، f_{xy} ، g_{xx} ، g_{xy} و g_{yy} برابر f'' هستند. بنابراین،

$$u_x = y_x f + y f_x + x_x g + x g_x = 0 + y f' + g + x g',$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = y_x f' + y (f')_x + g_x + x_x g' + x (g')_x$$

$$= 0 + y f'' + g' + g' + x g'' = y f'' + 2g' + x g''.$$

به صورت مشابه $u_y = yf' + f + xg'$ و $u_{xy} = yf'' + 2f' + xg''$ همچنین

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_x)_y = y_y f' + y(f')_y + g_y + x_y g' + x(g')_y \\ &= f' + yf'' + g' + 0 + xg'' = yf'' + f' + g' + xg''. \end{aligned}$$

بنابراین، با جاگذاری سه مقدار بالا داریم

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= (yf'' + 2g' + xg'') \\ &\quad - 2(yf'' + f' + g' + xg'') + (yf'' + 2f' + xg'') = 0. \end{aligned}$$

۴.۲. مطلوب است محاسبه $\iint_D x dx dy$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول و بین دایره $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = 2x$ است.

پاسخ: با توجه به اینکه $x^2 + y^2 = 2x$ را به صورت $(x-1)^2 + y^2 = 1$ می‌شود باز نویسی کرد، شکل ۳.۲-الف را ترسیم می‌کنیم. ناحیه مورد نظر عبارت است از داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، خارج دایره $x^2 + y^2 = 2x$ و واقع در ربع اول است:

$$D : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq x, 0 \leq y.$$

در نتیجه، شکل قطبی آن

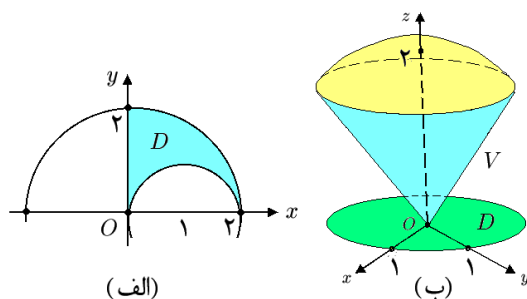
$$\begin{aligned} D' : 2r \cos \theta \leq r^2 \leq 4, \quad 0 \leq r \cos \theta, \quad 0 \leq r \sin \theta, \\ : 2 \cos \theta \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \iint_{D'} (r \cos \theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_{2 \cos \theta}^2 r^2 \cos \theta dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_{2 \cos \theta}^2 d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta - \cos^4 \theta) d\theta \\ &= \frac{8}{3} [\sin \theta]_0^{\pi/2} - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta))^2 d\theta = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

۵.۲. حجم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ که به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود شده است را به دست آورید

پاسخ: ابتدا کره و مخروط داده شده را به صورت شکل ۳.۲-ب ترسیم می‌کنیم. ناحیه مذکور



شکل ۳.۲:
(الف) مسأله ۴
از امتحان دوم
(ب) مسأله ۵
از امتحان دوم

V زیر نیم کره شمالی واقع است و لذا $z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$. از طرفی، v بالای مخروط واقع است، پس $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$. در نتیجه اگر از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم، آنگاه $r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$. از طرفی با قطع دادن کره و مخروط داریم $2z^2 = 2$ و چون $0 \leq z$ ، بنابراین $z = 1$. در نتیجه تصویر لبه خارجی V بر xOy عبارت است از $x^2 + y^2 = 1$. بنابراین، تصویرش $D: x^2 + y^2 \leq 1$ است. پس در مختصات قطبی $D': 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ و اگر V' تصویر استوانه‌ای V در فضای $Or\theta z$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \iiint_{V'} r dz dr d\theta = \iint_{D'} \left[\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r dz \right] dr d\theta \\ &= \iint_{D'} [rz]_{z=r}^{z=\sqrt{2-r^2}} dr d\theta = \iint_{D'} (r\sqrt{2-r^2} - r^2) dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^1 (r\sqrt{2-r^2} - r^2) dr \\ &= \frac{-2\pi}{3} \left[(2-r^2)^{3/2} - r^3 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

۶.۲. تابع برداری $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + (y^3/4)\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ مفروض است. انتگرال سطح این تابع را بر روی سطح بیضی گون خارجی $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ به کمک قضیه دیورژانس (واگرایی) محاسبه کنید.

پاسخ: چون میدان $\mathbf{F}$ بر بیضی گون S و داخلش، یعنی V ، پیوسته و بر V مشتق‌پذیر است، از قضیه دیورژانس می‌شود استفاده کرد. اما

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3/4)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = 3x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3z^2.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz \\ &= \iiint_V 3 \left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

برای حل انتگرال سه گانه سمت راست، از تغییر مقیاس $u = x$ ، $2v = y$ و $z = w$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = |2| = 2,$$

و دامنه $V : x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 \leq 1$ به $V' : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ تبدیل می‌شود، که کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع یک در فضای $Ouvw$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_{V'} 3(u^2 + v^2 + w^2) \times 2 du dv dw \\ &\stackrel{(1)}{=} 6 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \left[\int_0^1 \rho^2 \times \rho^2 \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right] d\theta \\ &= 6 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \\ &= 6 \left[\theta \right]_0^{2\pi} \left[-\cos \varphi \right]_0^\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = \frac{24\pi}{5}, \end{aligned}$$

که در (1) از مختصات کروی استاندارد در فضای $Ouvw$ استفاده کرده‌ایم.

۷.۲. فرض کنید S آن قسمت از سطح سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ باشد که بالای صفحه $z = 0$ واقع است و منحنی C مرز آن است. با توجه به این مفروضات، درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

پاسخ: ابتدا C را با قطع دادن سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 0$ به صورت $C : x^2 + y^2 = 1$ ، $z = 0$ معرفی کرده، و سپس به صورت

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0) ; 0 \leq t \leq 2\pi,$$

پارامتره می‌کنیم. چرا که در قضیه استوکس لازم است همواره روی سطح S ، در سمت چپ بردار مماس به منحنی C واقع باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -\pi. \end{aligned}$$

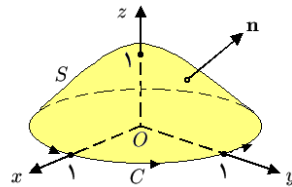
اکنون سعی می‌کنیم تا با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix} \\ &= (0-1, 0-1, 0-1) = -(1, 1, 1). \end{aligned}$$

به علاوه رویه S را به صورت $f = x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ معرفی می‌کنیم. بنابراین

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dx dy = \pm \frac{(2x, 2y, 1)}{|1|} dx dy$$

که چون (همان طوری که از شکل ۳.۲ بر می‌آید) $\mathbf{n}$ رو به بالا دارد (یعنی، مؤلفه z آن مثبت است) علامت + مورد قبول است. در نتیجه اگر D تصویر سطح بر صفحه xOy باشد، یعنی $D: x^2 + y^2 \leq 1$ ،



شکل ۴.۲: پاسخ مسأله ۴ از امتحان دوم

آنگاه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D -(1, 1, 1) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D -(2x + 2y + 1) dx dy \\ &= -2 \iint_D (x + y) dx dy - \iint_D dx dy = 0 - \text{Area}(D) = -\pi. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) چون x و y توابعی فردند و دامنه D نسبت به آنها متقارن است، دو انتگرال اول صفرند.

پاسخ مسایل امتحان سوم

۱.۳. معادله صفحه‌ای را بیابید که از دو نقطه $(1, 1, 0)$ و $(0, 1, 1)$ به یک فاصله است و از بین آن دو نیز می‌گذرد.^۱

پاسخ: فرض کنیم $M = (x, y, z)$ نقطه‌ای واقع بر صفحه مطلوب باشد، پس فاصله آن تا $A = (1, 1, 0)$ و $B = (0, 1, 1)$ به یک اندازه است، اما

$$\begin{aligned} d(M, A) &= \|M - A\| = \|(x-1, y-1, z)\| \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}, \\ d(M, B) &= \|M - B\| = \|(x, y-1, z-1)\| \\ &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}. \end{aligned}$$

بنابراین $d(M, A) = d(M, B)$ به این معنی است که

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2.$$

پس از ساده کردن، معادله صفحه به صورت $x = z$ حاصل می‌شود.

۲.۳. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در نقطه $(0, 0)$ بحث کنید.

پاسخ: به نظر می‌رسد که وضعیت x^2 و y در صورت و مخرج یکی است، بنابراین مسیر $y = ax^2$ یا $\mathbf{r}_a(t) = (t, at^2)$ را در نظر می‌گیریم، که a عددی ثابت است. به این ترتیب، حد f بر مسیر $\mathbf{r}_a$ برابر است با

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}_a(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (at^2)}{t^4 + (at^2)^2} = \frac{a}{1 + a^2},$$

که چون به a بستگی دارد، حد f در $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_a(t) = (0, 0)$ موجود نیست.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۳.۳. فرض کنیم منحنی C به صورت فصل مشترک دو رویه

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2 + 1, \quad z = x^2 + y^2,$$

تعریف شود. بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ ، و مقادیر انحنا و تاب را در یک نقطه دلخواه (x, y, z) بیابید.

پاسخ: ابتدا مقدار $x^2 + y^2$ را از معادله اول در معادله دوم قرار داده و به دست می‌آوریم $z = z^2/4 + 1$ بنابراین $z^2 - 4z + 4 = 0$ یا $z = 2$. پس در مجموع، داریم $z = 2$ ، $x^2 + y^2 = 2$ ، C که آن را به صورت

$$C : \mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2); 0 \leq t \leq 2\pi,$$

می‌شود پارامتره کرد. اکنون

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0),$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\sin t, 0),$$

$$\|\mathbf{r}'\| = \sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{r}''\| = \sqrt{(-\sqrt{2}\cos t)^2 + (-\sqrt{2}\sin t)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sqrt{2}\sin t & \sqrt{2}\cos t & 0 \\ -\sqrt{2}\cos t & -\sqrt{2}\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, 2\sin^2 t + 2\cos^2 t) = (0, 0, 2) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2.$$

بنابراین

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = (-\sin t, \cos t, 0),$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{2}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2} = \frac{(0, 0, 2) \cdot (\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\cos t, 0)}{(2)^2} = 0.$$

۴.۳. با فرض $F(x, y, z) = 0$ ، مقدار عبارت $\frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial y}$ را بیابید.

پاسخ: اگر y را تابعی از x و z در نظر بگیریم، آنگاه با مشتق‌گیری از طرفین رابطه $F(x, y, z) = 0$ نسبت به z داریم $\frac{\partial x}{\partial z}F_x + \frac{\partial y}{\partial z}F_y + \frac{\partial z}{\partial z}F_z = 0$ اکنون چون x و z مستقل فرض شده‌اند، پس $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$

۳.۲. پاسخ مسایل امتحان سوم ۵۴ فصل ۲. پاسخ مسایل

و یا اینکه $0 = F_z + F_y \frac{\partial y}{\partial z}$ و $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$ به صورت مشابه، داریم $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ و $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$. بنابراین

$$\frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-F_z}{F_y} \frac{-F_x}{F_z} \frac{-F_y}{F_x} = -1.$$

۵.۳. مطلوب است محاسبه مساحت قسمتی از سطح $z = x^2 - y^2$ که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد.

پاسخ: واضح است که تصویر قسمت جدا شده از سهمی گون هذلولوی به معادله $z = x^2 - y^2$ توسط استوانه مستدیر $x^2 + y^2 = 4$ ، بر صفحه xOy مجموعه $D: x^2 + y^2 \leq 4$ است. بنابراین در این مسأله با سطح $S: z = x^2 - y^2; (x, y) \in D$ مواجه هستیم. برای محاسبه المان مساحت آن، قرارداد می‌کنیم $f = x^2 - y^2 - z$ در این صورت

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} dx dy = \frac{\|(2x, -2y, -1)\|}{|-1|} dx dy \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{(S)} d\sigma = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \stackrel{(2)}{=} 2\pi \int_1^{\sqrt{17}} \sqrt{u} \frac{du}{8} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2u^{3/2}}{3} \right]_1^{\sqrt{17}} d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از مختصات قطبی استفاده کرده‌ایم و به این نکته توجه داشته‌ایم که شعاع D برابر ۲ است. در تساوی (۲) از تغییر متغیر $u = 4r^2 + 1$ استفاده کرده‌ایم.

۶.۳. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_R \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] dx dy dz$.

پاسخ: ابتدا از مختصات متجانس $z = cw$ و $y = bv$ و $x = au$ به منظور از میان بردن مخرج x^2, y^2 و z^2 استفاده می‌کنیم. در این حالت $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ به صورت $u^2 + v^2 + w^2$ تبدیل می‌شود و لذا تصویر R در فضای $Ouvw$ عبارت است از $R': u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ که کره‌ای به شعاع یک و مرکز در مبدا است. از طرفی

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \right| = |abc|.$$

در نتیجه، با استفاده از مختصات کروی برای فضای $Ouvw$ داریم

$$\begin{aligned} \iiint_R \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] dx dy dz &= \iiint_{R'} (u^2 + v^2 + w^2) |abc| du dv dw \\ &= |abc| \iiint_{R'} (u^2 + v^2 + w^2) du dv dw \\ &= |abc| \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \\ &= |abc| [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_0^\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{5} |abc|. \end{aligned}$$

۷.۳. هرگاه $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$ ، درستی قضیه دیورژانس را برای سطحی که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و از پایین به سهمیگون $z = x^2 + y^2$ محصور است تحقیق کنید.

پاسخ: چون

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0,$$

پس $\iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV$ صفر است، که Ω داخل سطح مورد نظر می‌باشد.

برای محاسبه قسمت دوم مسأله، می‌بایستی انتگرال $\mathbf{F}$ را بر سطح خارجی S مجموعه Ω حل کنیم (به شکل ۵.۲ توجه شود). برای این منظور به جای $x^2 + y^2$ در کره، چون $z = x^2 + y^2$ مقدار z را قرار داده و به دست می‌آوریم $z + z^2 = 2$ یا $z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ اما z در شکل ما همواره مثبت است، در نتیجه $z = 1$ مورد قبول است. یعنی، تصویر لبه بیرونی شکل مورد نظر بر صفحه xOy عبارت است از $x^2 + y^2 = 1$. در نتیجه، تصویر کل آن عبارت است از $D: x^2 + y^2 \leq 1$. سپس رویه‌های سازنده سطح خارجی جسم مذکور را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S_1: f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0; z \geq 0; (x, y) \in D,$$

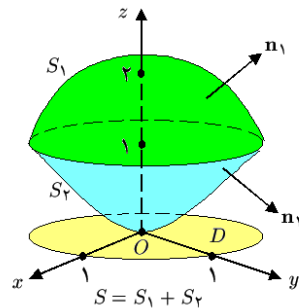
$$S_2: f_2 = x^2 + y^2 - z = 0; (x, y) \in D.$$

در S_1 بردار قائم $\mathbf{n}_1$ روبه بالا است (یعنی، مؤلفه z اش مثبت است) و در S_2 بردار قائم $\mathbf{n}_2$ رو به پایین است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 d\sigma_1 &= \pm \frac{\nabla f_1}{|\partial f_1 / \partial z|} dx dy = \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{|4z|} dx dy \\ &= \pm \frac{(x, y, \sqrt{2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy, \end{aligned}$$

که حالت + مورد قبول است. به علاوه

$$\mathbf{n}_2 d\sigma_2 = \pm \frac{\nabla f_2}{|\partial f_2 / \partial z|} dx dy = \pm (2x, 2y, -1) dx dy,$$



شکل ۵.۲: پاسخ مسأله ۷ از امتحان سوم

که حالت + مورد قبول است، زیرا باید مؤلفه z منفی باشد. بنابراین $\iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ برابر است با

$$\begin{aligned} \iint_D (z^2, x^2, y^2) \cdot (x, y, \sqrt{2-x^2-y^2}) \frac{dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}} &= \\ &= \iint_D \frac{z^2 x + x^2 y + y^2 \sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dxdy \\ &= \iint_D \left(x \sqrt{2-x^2-y^2} + \frac{x^2 y}{\sqrt{2-x^2-y^2}} + y^2 \right) dxdy \\ &= \iint_D \left(x \sqrt{2-x^2-y^2} + \frac{x^2 y}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \right) dxdy + \iint_D y^2 dxdy \\ &\stackrel{(1)}{=} 0 + \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \left[\int_0^1 r^3 dr \right] = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

که در تساوی (۱) از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که توابع دو انتگرال موجود در سمت چپ نسبت به تغییر $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ فرد هستند و D نسبت به این تغییر پایا است، پس هر دو صفرند. در ادامه از تغییر متغیر قطبی استفاده کرده‌ایم. به صورت مشابه، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (z^2, x^2, y^2) \cdot (2x, 2y, -1) dxdy \\ &= \iint_D (2xz^2 + 2yx^2 - y^2) dxdy \\ &= 2 \iint_D (xz^2 + yx^2) dxdy - \iint_D y^2 dxdy \\ &\stackrel{(2)}{=} 0 - \iint_D y^2 dxdy \stackrel{(3)}{=} -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۲) از فرد بودن تابع انتگرال اول و تقارن D استفاده کرده‌ایم و در تساوی (۳) از محاسبات انجام شده در قسمت بالا بهره برده‌ایم.

۳.۲. پاسخ مسایل امتحان سوم ۵۷ فصل ۲. پاسخ مسایل

۸.۳. هرگاه منحنی C به معادلات $z = x + y$, $C : x^2 + y^2 = a^2$ داده شده باشد، به کمک قضیه استوکس انتگرال خط زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz.$$

پاسخ: فرض کنیم $S : z = x + y$; $(x, y) \in D$ که $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ و $\mathbf{n}$ را رو به بالا می‌گیریم. پس اگر فرض کنیم $f = x + y - z$ آنگاه

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\nabla f}{|f_z|} = \pm(1, 1, -1) dx dy,$$

و بنا به تعریف

$$\begin{aligned} \text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & x + y & x + y + z \end{vmatrix} \\ &= (1 - 0, 0 - 1, 1 - 0). \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D (1, -1, 1) \cdot (-1, -1, 1) dx dy = \iint_D dx dy \\ &= \text{Area}(D) = (\pi \times a^2) = \pi a^2. \end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان چهارم

۱.۴. معادله صفحه‌ای را بنویسید که با خط $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ موازی و از فصل مشترک صفحات $x+y-z=0$ و $x-y+z+1=0$ بگذرد.^۱

پاسخ: معادله دسته صفحه‌هایی که از فصل مشترک دو صفحه مذکور می‌گذرند، عبارت از ترکیب خطی معادلات این دو صفحه است، یعنی به ازای عدد دلخواه α داریم $(x+y-z) + \alpha(x-y+z+1) = 0$ یا اینکه $(1+\alpha)x + (1-\alpha)y + (\alpha-1)z = -\alpha$. پس بردار قائم بر صفحه خواسته شده برابر $\mathbf{n} = (1+\alpha, 1-\alpha, \alpha-1)$ است. اما فرض شده است که این صفحه با خط داده موازی است، بنابراین بایستی $\mathbf{n}$ عمود بر بردار هادی خط $\mathbf{v} = (2, -1, -2)$ باشد. پس $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ یا $2(1+\alpha) - (1-\alpha) - 2(\alpha-1) = 0$. در نتیجه $\alpha = -3$ و معادله صفحه خواسته شده عبارت از $-2x + 4y - 4z = 3$ است.

۲.۴. در وجود و یا در عدم وجود اکسترموم‌های تابع $z = 4x^3 - 3xy^2 + y^2 + y$ بحث کنید.

پاسخ: ابتدا نقاط تکین تابع z را می‌یابیم. از برابر صفر قرار دادن گرادیان

$$\nabla z = (12x^2 - 3y^2, -6xy + 2y + 1),$$

به دست می‌آوریم

$$(1) \quad 12x^2 - 3y^2 = 0, \quad (2) \quad -6xy + 2y + 1 = 0.$$

از معادله (1) داریم $4x^2 = y^2$ یا $\pm 2x = y$. سپس، از معادله (۲) نتیجه می‌گیریم که $\pm 3y^2 + 2y + 1 = 0$ ، اما برای حالت $+$ ، دلتا برابر $4 - 12 < 0$ و برای حالت $-$ دلتا برابر $16 - 12 = 4$ است. پس حالت $-$ مورد قبول است. در نتیجه، بایستی $-3y^2 + 2y + 1 = 0$ یا $y = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-6}$ یا $y = 1$ و بنابراین $y = 1$ یا $y = -1/3$. اما اگر $y = 1$ آنگاه $2x = 1$ و $x = 1/2$ و اگر $y = -1/3$ آنگاه $2x = -1/3$ و $x = -1/6$. پس نقاط تکین این تابع عبارتند از $X_1 = (1/2, 1)$ و $X_2 = (-1/6, -1/3)$. به علاوه

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{X_1} = 12, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{X_1} = -6y \Big|_{X_1} = -6,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{X_1} = (2 - 6x) \Big|_{X_1} = -1, \quad D = AC - B^2 = -48.$$

چون $D < 0$ ، نقطه X_1 یک نقطه زینی است. به صورت مشابه برای نقطه X_2 داریم $A = -4$ ، $B = 2$ ، $C = 3$ و $D = -16$. پس چون $D < 0$ ، پس نقطه X_2 نیز یک نقطه زینی است.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۳.۴. در مشتق پذیری یا عدم مشتق پذیری تابع زیر بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

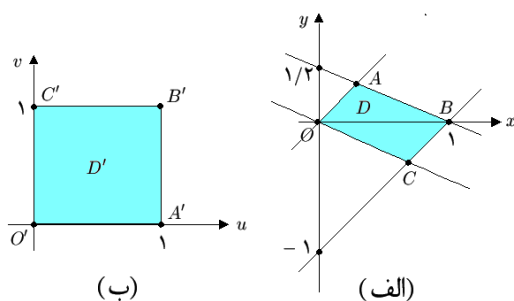
پاسخ: برای مشتق پذیری یک تابع، لازم است که تابع پیوسته باشد. پس می پرسیم که آیا f در $(0, 0)$ پیوسته است؟ برای پاسخ به این مسأله مسیر $C_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ گذرنده از مبدا را در نظر می گیریم که در آن α عددی دلخواه است. در این صورت حد f بر مسیر C_α برابر است با

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(C_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)^2 (\alpha t)}{(t)^3 + (\alpha t)^3} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^3},$$

که چون به α بستگی دارد، پس f در $(0, 0)$ حد ندارد و لذا نمی تواند مشتق پذیر باشد.

۴.۴. هرگاه D ناحیه محصور بین خطوط $y = x$ ، $y = x - 1$ ، $x + 2y = 0$ و $x + 2y = 1$ باشد، آنگاه $\iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)} dx dy$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا چهار خط داده شده را ترسیم می کنیم. برای این منظور کافی است که از هر خط دو نقطه رسم شود و سپس خطی از آنها گذرانده شود. مثلاً برای خط $x + 2y = 0$ اگر فرض کنیم $x = 0$ ، آنگاه $y = 0$ و اگر فرض کنیم $x = 2$ ، آنگاه $y = -1$. سپس نقاط $(0, 0)$ و $(2, -1)$ را رسم می کنیم و خطی از آنها می گذرانیم. (به شکل ۶.۲-الف) توجه شود) محل تلاقی خط $x = y$ و $x + 2y = 1$ به این صورت به دست می آید که این معادله را به طور همزمان حل می کنیم: $x + 2x = 1$ یا $x = 1/3$ بنابراین $y = x = 1/3$ و نقطه مشترک $A = (1/3, 1/3)$ است. نقاط $O = (0, 0)$ ، $B = (1, 0)$ و $C = (2/3, -1/3)$ اکنون تغییر متغیر $u = x + 2y$ و $v = x - y$ را اعمال می کنیم. چون تبدیل



شکل ۶.۲: پاسخ مسأله ۴ از امتحان چهارم

$(u, v) \mapsto (x, y)$ خطی است. پس تصویر هر خط، یک خط است و لذا کافی است رئوس چهار

ضلعی مذکور را تصویر کرده و سپس به ترتیب به هم وصل کنیم:

نقطه	x	y	u	v	تصویر نقطه
A	$1/3$	$1/3$	1	0	A'
B	1	0	1	1	B'
C	$2/3$	$-1/3$	0	1	C'
O	0	0	0	0	O'

آنگاه، نقاط بدست آمده را در صفحه Ouv ترسیم می‌کنیم (به شکل ۶.۲-ب) توجه شود). بنابراین تصویر D در صفحه Ouv را به صورت

$$D' = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\},$$

می‌شود نوشت. از طرفی

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = \frac{1}{\left| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right|} = \frac{1}{|-3|} = \frac{1}{3}.$$

در نتیجه،

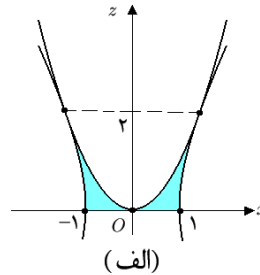
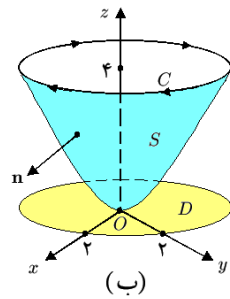
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)} dx dy &= \iint_{D'} \frac{u}{\cos v} \frac{1}{3} du dv \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 u du \right) \left(\int_0^1 \frac{dv}{\cos v} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \right) \right| \right]_0^1 = \frac{1}{6} \ln \left| \tan \frac{\pi+2}{\pi} \right|, \end{aligned}$$

که در برای حل انتگرال دوم از تغییر متغیر تانژانت نصف قوس استفاده کرده‌ایم.

۵.۴. حجم جسم صلبی که از پائین به صفحه xOy و از بالا به سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و از اطراف به هذلولیگون یکپارچه $x^2 + y^2 = z^2/4 + 1$ محصور شده است را بیابید.

پاسخ: به دلیل اینکه رویه‌های مطرح شده در مسأله همگی نسبت به محور z ها متقارن هستند (یعنی با عمل $x \mapsto -x$ و یا $y \mapsto -y$ عوض نمی‌شوند) کافی است شکل را در صفحه xOz ترسیم کرده و برای تجسم شکل اصلی، دوران یافته این شکل حول محور z ها را در نظر بگیریم. در این صفحه با سهمی $z = x^2$ (مقطع $z = x^2 + y^2$) با صفحه xOz هذلولی $z^2 = 4x^2 - 4$ (مقطع $z^2/4 + 1 = x^2 + y^2$) با صفحه xOz و خط $x = 0$ (مقطع $z = 0$ با صفحه xOz) مواجه هستیم. (به شکل ۷.۲-الف) توجه شود). سهمی و هذلولی یکدیگر را در $z = x^2$ و $z^2 = 4x^2 - 4$ یا $z^2 = 4x - 4$ قطع می‌کنند، پس $z = 2$. در این حالت $x = \sqrt{2}$ و چون $\left(\sqrt{4x^2 - 4} \right)' \big|_{x=\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ نتیجه می‌گیریم که دو منحنی مذکور در نقطه $(\sqrt{2}, 2)$ مماسند (به شکل ۷.۲-الف) توجه شود). حال از مختصات استوانه‌ای

استفاده می‌کنیم. چون شکل نسبت به محور z ها متقارن است، پس $0 \leq \theta \leq 2\pi$. از طرفی $0 \leq z \leq 2$ و اگر z ای را ثابت فرض کنیم، آنگاه r باید چنان باشد که از سطح سهمیگون تا سطح هذلولی تغییر کند، یعنی از $r^2 = z$ تا $r^2 = z^2/4 + 1$ یا به بیان دیگر از $r = \sqrt{z}$ تا $r = \sqrt{1 + z^2/4}$. بنابراین تصویر حجم مذکور V در فضای $Or\theta z$ عبارت است از



شکل ۷.۲:

(الف) مسأله ۵

از امتحان چهارم

(ب) مسأله ۶ از

امتحان چهارم

$$V' = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2, \sqrt{z} \leq r \leq \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} \right\},$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} r dr d\theta dz \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{1+z^2/4}} r dr \right] dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=\sqrt{z}}^{r=\sqrt{1+z^2/4}} dz = \pi \int_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{4} - z \right) dz \\ &= \pi \left[z + \frac{z^2}{12} - \frac{z^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

۶.۴. انتگرال خط تابع برداری $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (x-z)\mathbf{k}$ را بر روی مرز ناحیه $z = x^2 + y^2$ و $z = 4$ به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

پاسخ: رویه مورد نظر را به صورت

$$S : f = x^2 + y^2 - z = 0; (x, y) \in D,$$

می‌شود مطرح کرد، که در آن $D : x^2 + y^2 \leq 4$ (زیرا مقطع $z = 4$ و $z = x^2 + y^2$ عبارت از $x^2 + y^2 = 4$ است). ضمناً $\mathbf{n}$ رو به پایین است (مؤلفه z آن منفی است). (شکل ۷.۲-ب). از طرفی

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x-y & y-z & x-z \end{vmatrix}$$

$$= (0+1, 0-1, 0+1) = (1, -1, 1)$$

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

که حالت + مورد قبول است، به علاوه

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dx dy = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{|-1|} dx dy$$

$$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy.$$

در نتیجه

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D (1, -1, 1) \cdot (2x, 2y, -1) dx dy$$

$$= \iint_D (2x - 2y - 1) dx dy = 2 \iint_D (x - y) dx dy - \iint_D dx dy$$

$$\stackrel{(1)}{=} 0 - \text{Area}(D) = 0 - \pi \times (2)^2 = -4\pi.$$

توضیح اینکه در تساوی اول، انتگرال اول موجود در سمت چپ تساوی، انتگرالی از یک تابع فرد بر دامنه‌ای متقارن است.

۷.۴. هرگاه $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ و S سطح خارجی کره‌ای به شعاع یک باشد، آنگاه انتگرال سطح $\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ را به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کنید.

پاسخ: معادله کره مذکور عبارت است از $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: S از طرفی

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(z)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(x)}{\partial z} = 0 + 1 + 0 = 1.$$

پس اگر V داخل S باشد، داریم

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz$$

$$= \text{Vol}(V) = \frac{4}{3}\pi \times (1)^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

پاسخ مسایل امتحان پنجم

۱.۵. معادله صفحه‌ای را بنویسید که دو خط زیر را شامل شود: ^۱

$$\ell_1: x = 1 + 6t, \quad y = 3 - 5t, \quad z = 2 - 4t,$$

$$\ell_2: x + 2y - z = -2, \quad 3x + 2y + 2z = 7.$$

پاسخ: کافی است سه نقطه از صفحه مجهول را در اختیار داشته باشیم. اگر در ℓ_2 مقدار پارامتر t را صفر بگیریم به $X_1 = (1, 2, 3)$ می‌رسیم و اگر آن را برابر یک بگیریم به نقطه $X_2 = (7, -2, -2)$ خواهیم رسید. برای یافتن نقطه بعدی (چون باید سه نقطه غیر همخط داشته باشیم) دستگاه معرف خط ℓ_2 را حل می‌کنیم. از معادله اول داریم $z = x + 2y + 2$ و با قرار دادن این در معادله دوم داریم $5x + 6y = 3$ یا $y = \frac{3-5x}{6}$. به علاوه $z = x + 2y + 2$ ، پس $z = x + 2\frac{3-5x}{6} + 2$ یا $z = \frac{9-2x}{3}$. یعنی ℓ_2 عبارت از نقاط به شکل (x, y, z) است که $y = \frac{3-5x}{6}$ و $z = \frac{9-2x}{3}$. اگر فرض کنیم $x = 3$ ، آنگاه $y = -2$ و $z = 1$. پس $X_3 = (3, -2, 1)$ بر خط ℓ_2 و بنابراین آن صفحه واقع است. بنابراین معادله صفحه مورد نظر عبارت است از $0 = (X - X_3) \cdot ((X_1 - X_3) \times (X_2 - X_3))$ یا به بیان دیگر

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ 1-3 & 3+2 & 2-1 \\ 7-3 & -2+2 & -2-1 \end{vmatrix} = 0.$$

بنابراین $0 = -15(x-3) - 2(y+2) - 20(z-1)$ یا $15x + 2y + 20z = 61$.

۲.۵. خمی به معادله $\mathbf{r}(t) = 3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$ مفروض است، بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ و مقدار انحنا را در هر نقطه دلخواه از آن بیابید.

پاسخ: ابتدا مشتقات اول تا سوم $\mathbf{r}(t)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{r}'(t) = (3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad \mathbf{r}''(t) = (-3 \sin t, -3 \cos t, 0),$$

$$\mathbf{r}'''(t) = (-3 \cos t, 3 \sin t, 0).$$

به علاوه

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 \cos t & -3 \sin t & 4 \\ -3 \sin t & -3 \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} &= (12 \cos t, -12 \sin t, -9), \\ \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5, \\ \|\mathbf{r}''(t)\| &= \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 0} = \sqrt{9} = 3, \\ \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| &= \sqrt{144 \cos^2 t + 144 \sin^2 t + 81} = \sqrt{225} = 15. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4) \\ &= \left(\frac{3}{5} \cos t, \frac{-3}{5} \sin t, \frac{4}{5} \right), \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} = \frac{1}{15}(12 \cos t, -12 \sin t, -9) \\ &= \left(\frac{4}{5} \cos t, \frac{-4}{5} \sin t, \frac{-3}{5} \right), \\ \mathbf{N}(t) &= \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 \cos t/5 & -4 \sin t/5 & -3/5 \\ 3 \cos t/5 & -3 \sin t/5 & 4/5 \end{vmatrix} \\ &= (-\sin t, -\cos t, 0), \\ \kappa(t) &= \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{15}{5^3} = \frac{3}{25}. \end{aligned}$$

۳.۵. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در کل فضای $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

پاسخ: اگر $X_0 \neq (0, 0)$ آنگاه f در یک همسایگی از X_0 به صورت $xy/\sqrt{x^4 + y^4}$ تعریف می‌شود، که خارج قسمتی از دو تابع پیوسته است و چون مخرج در X_0 صفر نمی‌شود، تابع $xy/\sqrt{x^4 + y^4}$ و لذا خود f در X_0 پیوسته است. اما f در $X_0 = (0, 0)$ ناپیوسته است زیرا حد f در $(0, 0)$ موجود نیست. دلیل این امر آن است که اگر مسیر $\mathbf{r}_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ را انتخاب کنیم، آنگاه حد f بر مسیر $\mathbf{r}_\alpha$ (که به $(0, 0)$ منتهی است) برابر است با

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)(\alpha t)}{\sqrt{t^4 + \alpha^4 t^4}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^4}},$$

که به انتخاب مسیر بستگی دارد. در نتیجه، f در کل $\mathbb{R}^2$ به جز مبدا پیوسته است.

۴.۵. اگر x و y متغیرهای مستقل باشند و

$$u^3 + v^3 + x^5 + 4y^5 = 10, \quad u^2 + v^2 + x^9 + y^8 = 11,$$

آنگاه مطلوب است محاسبه u_x و v_y .

پاسخ: برای به دست آوردن v_y از طرفین معادلات داده شده نسبت به y مشتق می‌گیریم، به این ترتیب به دستگاہی با دو معادله از مجهولات u_y و v_y می‌رسیم. اکنون کافی است که این دستگاہ را بر حسب v_y حل کنیم:

$$3u^2u_y + 3v^2v_y + 0 + 20y^4 = 0, \quad 2uu_v + 2vv_y + 0 + 8y^2 = 0.$$

اگر معادله خط اول را در ۲ و معادله خط دوم را در $-3u$ ضرب کرده و سپس آن دو را با هم جمع کنیم، آنگاه به معادله $(6v^2 - 6uv)v_y + 40y^2 - 24y^7u = 0$ می‌رسیم، و با توجه به آن داریم $v_y = \frac{24y^7u - 40y^4}{6v^2 - 6uv}$. به صورت مشابه، برای حصول u_x از طرفین معادلات داده شده نسبت به x مشتق گرفته و دستگاہ را بر حسب u_x حل کنیم:

$$3u^2u_x + 3v^2v_x + 5x^4 + 0 = 0, \quad 2uu_x + 2vv_x + 9x^8 + 0 = 0.$$

$$u_x = \frac{27vx^8 - 10x^4}{6u^2 - 6uv} \quad \text{یا} \quad (6u^2 - 6uv)u_x + 10x^4 - 27vx^4 = 0$$

۵.۵. مطلوب است $\iint_R e^{-(x^2/a^2 + y^2/b^2)} dx dy$ که در آن R ناحیه داخل بیضی به معادله $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ است.

پاسخ: مشکل دامنه و تابع یکی است! در مخرج x^2 عدد a^2 و در مخرج y^2 عدد b^2 وجود دارد. برای رفع این مشکل از تغییر مختصات $u = x/a$ و $v = y/b$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، عبارت $x^2/a^2 + y^2/b^2$ به $u^2 + v^2$ تبدیل می‌شود، پس چون

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right| = |ab|,$$

و نیز تصویر $R: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ در صفحه uOv عبارت از $u^2 + v^2 \leq 1$ است، داریم

$$\iint_R e^{-(x^2/a^2 + y^2/b^2)} dx dy = \iint_{R'} e^{-(u^2 + v^2)} |ab| du dv.$$

اکنون از مختصات استاندارد قطبی در صفحه uOv استفاده می‌کنیم: $u = r \cos \theta$ و $v = r \sin \theta$. در این صورت، تصویر R' در صفحه $rO\theta$ عبارت از

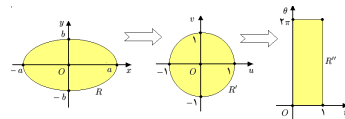
$$R'': 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1,$$

است و ژاکوبین u, v نسبت به θ, r برابر r می‌باشد، (به شکل ۸.۲ توجه شود). بنابراین

$$\iint_R e^{-(x^2/a^2 + y^2/b^2)} dx dy = |ab| \iint_{R''} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= |ab| \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^1 e^{-r^2} r dr$$

$$= 2\pi |ab| \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 = |ab| \frac{e-1}{e} \pi.$$



شکل ۸.۲: پاسخ مسأله ۵ از امتحان پنجم

۶.۵. حجم جسم صلب محصور بین سطوح $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید ($a < b$).

پاسخ: معادله $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع a را معرفی می‌کند. معادله $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع b را معرفی می‌کند، که چون $a \leq b$ ، کره دوم کره اول را در بر دارد. معادله $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ نیمه بالایی مخروط استاندارد است. به دلیل این که شکل نسبت به محور z ها متقارن است (یعنی، با تبدیل x به $-x$ و یا y به $-y$ تغییر نمی‌کند) کافی است آن را در صفحه yOz رسم کرده و تصور کنیم که با دوران این شکل حول محور z ها، جسم مورد نظر تولید می‌شود (به شکل ۹.۲-الف) توجه شود). از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. چون شکل نسبت به محور z ها متقارن است، پس $0 \leq \theta \leq 2\pi$ از سوی دیگر چون $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و در شکل ما $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ، پس در این صورت $a \leq \rho \leq b$. از طرف دیگر، اگر نقطه M از شکل ۹.۲-ب) بر مخروط واقع باشد، $\rho \cos \varphi = z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \varphi$ و لذا $\tan \varphi = 1$ ؛ پس $\varphi = \pi/4$. یعنی $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. بنابراین، حجم خواسته شده برابر است با

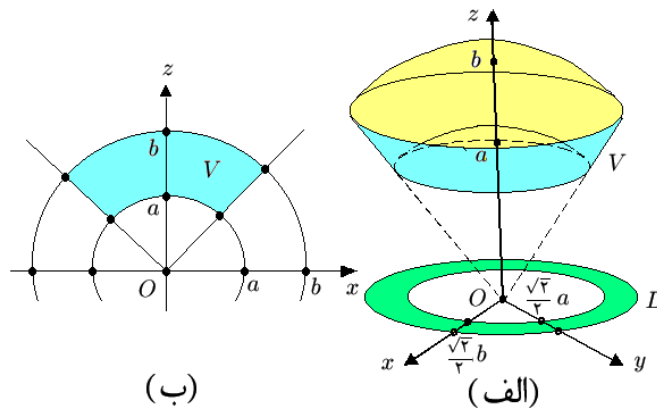
$$\iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_a^b \rho d\rho \right)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_{\pi/4}^0 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_a^b = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) (b^3 - a^3).$$

۷.۵. مساحت سطح جدا شده از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ بوسیله صفحات $z = 1$ و $z = 2$ را به دست آورید.

پاسخ: مقطع صفحه $z = 1$ با مخروط، عبارت از دایره $z = 1$ و $x^2 + y^2 = 1$ است و تصویر آن بر صفحه xOy عبارت از دایره $x^2 + y^2 = 1$ است. به صورت مشابه، فصل مشترک صفحه $z = 2$ با مخروط، عبارت از دایره C_2 است که تصویرش بر صفحه xOy دایره $x^2 + y^2 = 4$ است. بنابراین



شکل ۹.۲: پاسخ
مسئله ۶ از امتحان
پنجم

تصویر سطح مورد نظر بر صفحه xOy عبارت است از $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. اما، سطح مورد نظر را به صورت $S: f = x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0, (x, y) \in D$ می‌شود بیان کرد پس

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dx dy = \frac{\|(2x, 2y, -2z)\|}{|-2z|} dx dy \\ &= \frac{1}{2z} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{8x^2 + 8y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \text{Area}(D) \\ &= \sqrt{2} (\pi \times (2)^2 - \pi \times (1)^2) = 3\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

۸.۵. انتگرال خط $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$ را محاسبه کنید.

پاسخ: به دلیل آنکه فقط ابتدا و انتهای مسیر داده شده است، طراح پذیرفته است که میدان برداری $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$ کامل است. پتانسیل آن کدام است؟ اگر پاره خط $\mathbf{r}(t) = (tx, ty, tz)$ با $0 \leq t \leq 1$ واصل میان مبدا و نقطه ثابت (x, y, z) را در نظر بگیریم، آنوقت پتانسیل $\mathbf{F}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^1 \{ (ty)(tz) d(tx) + (tx)(tz) d(ty) + (tx)(ty) d(tz) \} \\ &= \int_0^1 \{ 3xyz t^2 dt \} = [xyz t^3]_0^1 = xyz. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz = f(6,1,1) - f(1,2,3) = 6 - 6 = 0.$$

۹.۵. درستی قضیه دیورژانس را برای سطح S خارج جسم محدود به صفحات $x=0$ ، $x+y+z=1$ ، $y=0$ و $z=0$ و میدان برداری $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$ تحقیق کنید.

پاسخ: صفحه $x+y+z=1$ هر سه محور را به فاصله یک از مبدا قطع می‌کند، و فصل مشترک با سه صفحه مختصاتی $x=0$ ، $y=0$ و $z=0$ به صورتی که در شکل ۱۰.۲ آمده است. وجوه این شکل چهار سطح به شرح زیرند:

$$\begin{aligned} S_1 : z &= 1-x-y; & D_1 &= \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}, \\ S_2 : z &= 0; & D_2 &= D_1, \\ S_3 : x &= 0; & D_3 &= \{(y,z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y\}, \\ S_4 : y &= 0; & D_4 &= \{(x,z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x\}. \end{aligned}$$

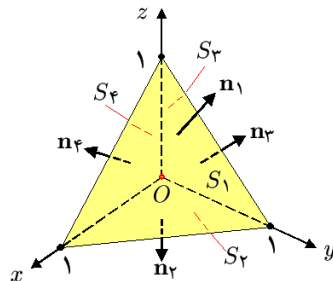
برای سطح S_1 معادله معرف $f = x+y+z-1=0$ است، پس چون $\mathbf{n}$ رو به بالا (مؤلفه z اش مثبت است)، داریم:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \quad d\sigma_1 = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

به صورت مشابه،

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 &= (0,0,-1), & \mathbf{n}_3 &= (-1,0,0), & \mathbf{n}_4 &= (0,-1,0), \\ d\sigma_2 &= dx dy, & d\sigma_3 &= dy dz, & d\sigma_4 &= dx dz. \end{aligned}$$

بنابراین،



شکل ۱۰.۲: پاسخ مسأله ۹ از امتحان پنجم

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{D_1} (x+y, y+z, z+x) \cdot (1,1,1) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_1} 2(x+y+z) \, dx dy = 2 \iint_{D_1} dx dy \\
 &= 2 \text{Area}(D_1) = 1, \\
 \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{D_2} (x+y, y+z, z+x) \cdot (0, 0, -1) \, dx dy \\
 &= \iint_{D_2} -(z+x) \, dx dy = \iint_{D_2} -x \, dx dy \\
 &= - \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} x \, dy \right] dx = - \int_0^1 x(1-x) \, dx \\
 &= - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

به دلیل تقارن موجود در مسأله (یعنی، با تعویض $x \mapsto y$ ، $y \mapsto z$ ، $z \mapsto x$ یا $x \mapsto z$ نه دامنه تغییر می‌کند و نه میدان برداری)، داریم

$$\iint_{(S_3)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{(S_4)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -\frac{1}{6}.$$

در نتیجه

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

حال از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. برای این منظور توجه داریم که

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(z+x)}{\partial z} = 3.$$

بنابراین اگر V داخل S باشد، داریم

$$\begin{aligned}
 \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz \\
 &= \iiint_V 3 \, dx dy dz = 3 \times \text{Vol}(V) \\
 &= 3 \times \left(\frac{1}{3} \times 1 \times \text{Area}(D_1) \right) = 3 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان ششم

۱.۶. a معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $(0, -1, 1)$ و محل تقاطع دو صفحه به معادلات $x + y - z = -1$ و $2x - 3y + z = 2$ بگذرد. b نوع سطح $xyz = 0$ را مشخص کنید.^۱

پاسخ: a از این صفحه سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت لازم است. یک نقطه از آنها، نقطه مفروض $M_1 = (0, -1, 1)$ است. برای بدست آوردن دو نقطه دیگر دستگاهی مرکب از دو معادله داده شده را حل می‌کنیم. از معادله صفحه $z = x + y + z$ و با قرار دادن آن در معادله دوم داریم $2x - 3y + x + y + 1 = 2$ یا $3x - 2y = 1$. بنابراین $y = (3x - 1)/2$ و با قرار دادن این مقدار y در معادله اول بدست می‌آوریم $z = (5x + 1)/2$. حال اگر x را (که می‌تواند هر عدد دلخواهی باشد) برابر یک بگیریم، بدست می‌آوریم $y = 1$ و $z = 3$ ؛ یعنی، $M_2 = (1, 1, 3)$. مشابه قبل، بازاء $x = -1$ داریم $y = -2$ و $z = -2$ ؛ یعنی، $M_3 = (-1, -2, -2)$. در نتیجه، معادله صفحه مذکور عبارت است از $(X - M_1) \cdot \{(M_3 - M_1) \times (M_2 - M_1)\} = 0$ یا

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-(-1) & z-1 \\ 1-0 & 1-(-1) & 3-1 \\ -1-0 & -2-(-1) & -2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

پس، $x(-6+2) + (y+1)(-2+3) + (z-1)(-1+2) = 0$ یا به عبارت دیگر $-4x + y + z = 0$.

b کافی است به محاسبات به شرح زیر، توجه کنیم

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) | xyz = 0\} &= \{(x, y, z) | x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) | x = 0\} \cup \{(x, y, z) | y = 0\} \cup \{(x, y, z) | z = 0\} \\ &= yOz \cup xOz \cup xOy. \end{aligned}$$

یعنی شکل مورد نظر اجتماع سه صفحه مختصاتی در فضای $Oxyz$ است.

۲.۶. پتانسیل میدان نیروی $\mathbf{F} = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k}$ را بیابید.

پاسخ: در اینجا، عبارت دیفرانسیلی نظیر F عبارت است از

$$\eta = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2ye^{2x} + e^z)dx + (3ze^{3y} + e^{2x})dy + (xe^z + e^{3y})dz,$$

که در آن $P = 2ye^{2x} + e^z$ ، $Q = 3ze^{3y} + e^{2x}$ و $R = xe^z + e^{3y}$. ابتدا شرایط کنسرواتو (=باقی) بودن را تحقیق می‌کنیم:

$$P_y = 2e^{2x} = Q_x, \quad P_z = e^z = R_x, \quad Q_z = 3e^{3y} = R_y.$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

بنابراین $\mathbf{F}$ کنسرواتو است. اکنون به منظور محاسبه پتانسیل $\mathbf{F}$ ، پاره خط

$$C : \mathbf{r}(t) = (tx, ty, tz); \quad 0 \leq t \leq 1,$$

را در نظر می‌گیریم که در آن x, y و z اعدادی ثابتند. برای به دست آوردن پتانسیل $\mathbf{F}$ کافی است از $\mathbf{F}$ بر C انتگرال بگیریم:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_0^1 \left\{ (2tye^{2tx} + e^{tz}) d(tx) + (3tze^{3ty} + e^{2tx}) d(ty) + (txe^{tz} + e^{3ty}) d(tz) \right\} \\ &= \int_0^1 \left\{ 2xyte^{2tx} + xe^{tz} + 3zyte^{3ty} + ye^{2tx} + txze^{tz} + ze^{3ty} \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ (2xyte^{2tx} + ye^{2tx}) + (3zyte^{3ty} + ze^{3ty}) + (txze^{tz} + xe^{tz}) \right\} dt \\ &= [tye^{2tx} + tze^{3ty} + txe^{tz}]_0^1 = ye^{2x} + ze^{3y} + xe^z. \end{aligned}$$

۳.۶. هرگاه $h(x, y) = f(x + 2y) + f(x - 2y)$ ، مقدار عبارت $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنید $u = x + 2y$ و $v = x - 2y$ ، در این صورت بنا به قاعده زنجیره‌ای مشتق

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} f'(u) + \frac{\partial v}{\partial x} f'(v) & \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} f'(u) + \frac{\partial v}{\partial y} f'(v) \\ &= f'(u) + f'(v), & &= 2f'(u) - 2f'(v), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} f''(u) + \frac{\partial v}{\partial x} f''(v) & &= 2 \frac{\partial u}{\partial y} f''(u) - 2 \frac{\partial v}{\partial y} f''(v) \\ &= f''(u) + f''(v), & &= 4f''(u) + 4f''(v). \end{aligned}$$

بنابراین، عبارت مورد نظر صفر است.

۴.۶. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در نقطه $(0, 0)$ بحث کنید.

پاسخ: اگر مسیرهای $\mathbf{r}_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ با $\alpha \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیریم. آنگاه حد مسیری f بر مسیر $\mathbf{r}_\alpha$ منتهی به مبدأ برابر است با

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t)(\alpha t)}{(t)^2 + (\alpha t)^2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2},$$

که چون به α بستگی دارد، پس حد f در $C_\alpha(0) = (0, 0)$ موجود نیست؛ در نتیجه f در $(0, 0)$ ناپیوسته است.

۵.۶. گشتاور ماند نسبت به محور x یک ناحیه جرم‌دار محصور به بیضی به معادله $9y^2 + z^2 = 9$ را با فرض ثابت بودن تابع چگالی ($\delta = 1$) بیابید.

پاسخ: ناحیه مورد بحث $D: 9y^2 + z^2 \leq 9$ در صفحه yOz است و محور x ها به آن صفحه عمود است. پس گشتاور حول محور x ها به معنی گشتاور حول محل برخورد محور x ها با صفحه yOz است. مطابق بحث‌های کلاسیک این گشتاور از فرمول زیر محاسبه می‌شود

$$I_0(D) = \iint_D (y^2 + z^2) \delta(y, z) dy dz.$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $y = r \cos \theta$ و $z = 3r \sin \theta$ استفاده می‌کنیم، تا با قرار دادن اینها در عبارت $9y^2 + z^2$ ، به توان ضریب ۹ را فاکتور گرفت، این عبارت به صورت $9r^2$ در خواهد آمد. پس $9r^2 \leq 9$ یا $0 \leq r$. از طرفی به دلیل اینکه شرطی بر θ اعمال نشده است، پس $0 \leq \theta \leq 2\pi$. یعنی تصویر D در صفحه $rO\theta$ عبارت است از $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. از طرفی داریم

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 3 \sin \theta & 3r \cos \theta \end{bmatrix} = 3r.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} I_0(D) &= \iint_{D'} \{(r \cos \theta)^2 + (3r \sin \theta)^2\} 3r dr d\theta \\ &= 3 \left(\int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \\ &= 3 \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 9 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right\} d\theta \right) \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 3 [5\theta - 2 \sin 2\theta]_0^{2\pi} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{2} \pi. \end{aligned}$$

۶.۶. انتگرال سه‌گانه تابع $f(x, y, z) = xyz$ را بر ناحیه R محصور بین استوانه‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + z^2 = 4$ را محاسبه کنید.

پاسخ: اگر $x^2 + z^2 = 4$ را بر حسب z حل کنیم، به دست می‌آوریم $z = \pm \sqrt{4 - x^2}$ که دامنه این توابع به دایره $x^2 + y^2 = 4$ محدود است، یعنی ناحیه انتگرال گیری عبارت است از

$$R = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4 - x^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}, (x, y) \in D\},$$

که در آن $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \iiint_R xyz dx dy dz &= \iint_D \left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xyz dz \right] dx dy \\ &= \iint_D \left[xy \frac{z^2}{2} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx = \iint_D 0 dy dx = 0. \end{aligned}$$

۷.۶. انتگرال خط تابع $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ را در طول دایره مثلثاتی محاسبه کنید. آیا انتگرال فوق را می‌توان به کمک قضیه گرین محاسبه نمود؟ چرا؟

پاسخ: دایره مثلثاتی را به صورت $C: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi$ می‌توان پارامتره کرد. بنابراین

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

این حکم را به توسط قضیه گرین نمی‌توان ثابت کرد. زیرا، $\mathbf{F}$ در نقطه $(0, 0)$ که در داخل C واقع است، تعریف نمی‌شود؛ در حالی که باید $\mathbf{F}$ در آنجا حتی مشتق پذیر نیز باشد.

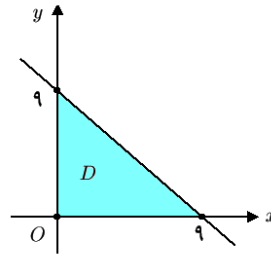
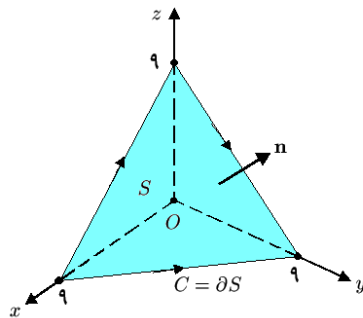
۸.۶. انتگرال خط $\int_C x(z - y) dx + y(x - z) dy + z(y - x) dz$ که در آن C مثلثی با رئوس $(0, 0, 9)$ ، $(0, 9, 0)$ ، $(9, 0, 0)$ واقع بر صفحه‌ای به معادله $x + y + z = 9$ است را به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

پاسخ: صفحه $x + y + z = 9$ سه محور را در ۹ قطع می‌کند (به شکل ۱۱.۲ توجه شود). بنابراین رویه مورد بحث عبارت است از

$$S: f = x + y + z - 9 = 0: (x, y) \in D,$$

که در آن $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9 - x\}$ ، به علاوه

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1+1+1}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (1, 1, 1).$$



شکل ۱۱.۲: پاسخ
مسئله ۸ از امتحان
ششم

که چون مطابق شکل ۱۱.۲، مؤلفه z در $\mathbf{n}$ باید مثبت باشد، پس در عبارت بالا حالت + مورد قبول است. همچنین،

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dx dy = \frac{\sqrt{3}}{|1|} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x) \end{vmatrix} = (z+y, x+z, y+x).$$

بنابراین، انتگرال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D (z+y, x+z, y+x) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \sqrt{3} dx dy \\ &= 2 \iint_D (x+y+z) dx dy = 18 \iint_D dx dy \\ &= 18 \times A(D) = 18 \times \frac{1}{2} \times 9 \times 9 = 729. \end{aligned}$$

۹.۶. انتگرال سطح تابع برداری $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ بر سطح خارجی بیضوی $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ را به کمک قضیه گاوس (دیورژانس یا استروگراسکی) محاسبه کنید.

پاسخ: در این مورد

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2(x+y+z),$$

و اگر D داخل بیضوی $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ باشد، داریم

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz = 2 \iiint_D (x+y+z) dx dy dz.$$

این انتگرال صفر است، زیرا دامنه D نسبت به x ، y و z متقارن است (یعنی با عوض کردن x با $-x$ ، y با $-y$ و یا z با $-z$ تغییر نمی‌کند) و تابع $x+y+z$ فرد است (یعنی، با تعویض مورد نظر تغییر علامت می‌دهد).

پاسخ مسایل امتحان هشتم

۱.۷. منحنی C از تلاقی سطوح $x^2 + 2yz = 13$ و $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$ حاصل شده است. نشان دهید خط مماس بر منحنی C در نقطه $A = (1, 2, 3)$ از نقطه $B = (-1, 4, 1)$ می‌گذرد.^۱

پاسخ: فرض کنیم

$$S_1 : f_1 := x^2 + 2yz - 13 = 0,$$

$$S_2 : f_2 := x^2 + 2y^2 + z^2 - 18 = 0.$$

بنابراین $C = S_1 \cap S_2$. در این حالت ∇f_1 به S_1 و ∇f_2 به S_2 عمود است، پس $\nabla f_1 \times \nabla f_2$ هم به S_1 و هم به S_2 مماس است و در نتیجه به C مماس می‌باشد. پس مماس به C در نقطه A عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \nabla f_1|_A &= (2x, 2z, 2y)|_A \times (2x, 4y, 2z)|_A \\ &= (2, 6, 4) \times (2, 8, 6) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = (4, -4, 4). \end{aligned}$$

بنابراین مماس به C در نقطه A ، خطی است که از A به موازات $\mathbf{v}$ می‌گذرد:

$$\ell : \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{4}.$$

اکنون تحقیق می‌کنیم که $B \in \ell$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که مختصات B در معادلات ℓ صدق می‌کند.

۲.۷. منحنی C از تلاقی سطوح $x^2 + 2yz = 13$ و $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$ حاصل شده است. نشان دهید خط مماس بر منحنی C در نقطه $A = (1, 2, 3)$ از نقطه $B = (-1, 4, 1)$ می‌گذرد.

پاسخ: ظاهراً نقش x و y^2 در صورت و مخرج تابع یکی است! پس برای جبران نصف بودن توان x نسبت به توان y ، مسیرهای به شکل $x = \alpha y^2$ را امتحان می‌کنیم: $\mathbf{r}_\alpha(t) = (\alpha t^2, t)$. در این صورت، حد مسیری f بر $\mathbf{r}_\alpha$ برابر است با

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\alpha t^2)(t)^2}{(\alpha t^2)^2 + (t)^4} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

که چون α بستگی دارد (یعنی، به انتخاب مسیر بستگی دارد)، حد f در $(0, 0)$ وجود ندارد. بنابراین f در $(0, 0)$ ناپیوسته است.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۳.۷. متحرکی بر روی یک مسیر داده شده با قانون زیر حرکت می‌کند:

$$x = 3 \int_0^t \sin(u^2) du, \quad y = 5 \int_0^t \cos(u^2) du, \quad z = 4 \int_0^t \sin(u^2) du, \quad t \geq 0.$$

الف) مطلوب است مسافت طی شده از لحظه $t = 0$ تا لحظه $t = 1$.

ب) شعاع انحناء مسیر فوق را در نقطه $t = 1$ بیابید.

پاسخ: بنابه فرمول مشتق‌گیری از انتگرال وابسته به پارامتر^۱ داریم

$$x'(t) = 3 \sin t^2, \quad y'(t) = 5 \cos t^2, \quad z'(t) = 4 \sin t^2.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} ds &= \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{(3 \sin t^2)^2 + (5 \cos t^2)^2 + (4 \sin t^2)^2} dt \\ &= \sqrt{25 \sin^2 t^2 + 25 \cos^2 t^2} dt = 5 dt, \end{aligned}$$

و پاسخ قسمت (الف) عبارت است از $\int_0^1 5 dt = 5$. برای محاسبه شعاع انحناء در $t = 1$ ، لازم است که $\mathbf{r}'(1)$ و $\mathbf{r}''(1)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(1) &= (3 \sin 1, 5 \cos 1, 4 \sin 1) \\ &= (3 \sin 1, 5 \cos 1, 4 \sin 1), \\ \mathbf{r}''(1) &= (6t \cos t^2, -10t \sin t^2, 8t \cos t^2)|_{t=1} \\ &= (6 \cos 1, -10 \sin 1, 8 \cos 1), \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 \sin 1 & 5 \cos 1 & 4 \sin 1 \\ 6 \cos 1 & -10 \sin 1 & 8 \cos 1 \end{vmatrix} = (40, 0, -30).$$

در نتیجه

$$\kappa(1) = \frac{\|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)\|}{\|\mathbf{r}'(1)\|^3} = \frac{\sqrt{1600 + 0 + 900}}{(5)^3} = \frac{50}{125} = \frac{2}{5},$$

و $R(1) = 1/\kappa(1) = 5/2$ که پاسخ قسمت (ب) است.

۴.۷. z تابعی از متغیرهای x و y است که توسط معادلات $y = u + v$ و $x = u^2 + v^2$ و $z = u^3 + v^3$ تعریف شده است (u و v را توابعی از x و y در نظر بگیرید). مطلوب است محاسبه $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$.

^۱ منظور فرمول $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = b'(t)f(b(t), t) - a'(t)f(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx$ از درس عمومی یک است.

پاسخ: z تابعی از u و v است. از دستگاه معادلات $x = u^2 + v^2$ و $y = u + v$ می‌شود u و v را بر حسب توابعی از x و y بیان کرد، بنابراین چون z تابعی از u و v است، پس نتیجه می‌گیریم که تابعی از x و y نیز هست. پس سخن گفتن از $\partial z / \partial y$ و $\partial z / \partial x$ منطقی است. برای به دست آوردن $\partial z / \partial x$ از دو طرف رابطه $z = u^3 + v^3$ به نسبت x مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

برای به اتمام رساندن بحث باید $\partial u / \partial x$ و $\partial v / \partial x$ را حساب کنیم. بنابراین، از طرفین دستگاه مطرح شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$1 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

سپس، این دستگاه را به منظور یافتن $\partial u / \partial x$ و $\partial v / \partial x$ حل می‌کنیم: از معادله دوم نتیجه می‌گیریم $\partial v / \partial x = -\partial u / \partial x$ داریم

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{2u - 2v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2u - 2v}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{1}{2u - 2v} + 3v^2 \frac{-1}{2u - 2v} = \frac{3u^2 - 3v^2}{2u - 2v} = \frac{3}{2}(u + v).$$

به صورت مشابه، $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u - v}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{v - u}$ و

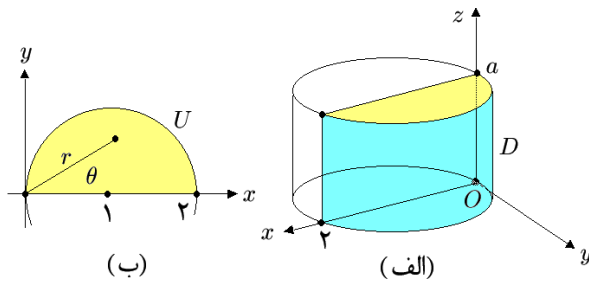
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 3u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 3u^2 \frac{v}{v - u} + 3v^2 \frac{u}{u - v} = \frac{-3u^2 v + 3v^2 u}{u - v} = -3uv. \end{aligned}$$

۵.۷. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ که در آن D به وسیله استوانه $x^2 + y^2 = 2x$

و صفحات $z = 0$ ، $y = 0$ و $z = a > 0$ واقع در یک هشتم اول محصور شده است.

پاسخ: ابتدا معادله $x^2 + y^2 = 2x$ را به صورت $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ یا $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ بازنویسی می‌کنیم. پس پایه استوانه مورد بحث، دایره‌ای به مرکز $(1, 0)$ و شعاع یک است (به شکل ۱۲.۲-الف) توجه شود). از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. روشن است که $0 \leq z \leq a$ و بایستی $(x, y) \in U$ (به شکل ۱۲.۲ توجه شود). در اینجا $x^2 + y^2 \leq 2x$. بنابراین، $r^2 \leq 2r \cos \theta$ در نتیجه $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$. علاوه بر $y \geq 0$ و $x \geq 0$ ؛ بنابراین $r \cos \theta \geq 0$ و $r \sin \theta \geq 0$ یا به بیان دیگر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ هر دو نامنفی‌اند. در نتیجه $0 \leq \theta \leq \pi/2$. پس تصویر قطبی U عبارت از

$$U' = \left\{ (r, \theta) \mid \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \right\},$$



شکل ۱۲.۲: پاسخ مسأله ۵ از امتحان هفتم

است. در نتیجه، اگر D' تصویر استوانه‌ای D باشد، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{D'} z r^2 dz dr d\theta \\ &= \left(\int_0^a z dz \right) \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\theta} r^2 dr \right] d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{4a^2}{3} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{8a^2}{9}. \end{aligned}$$

۶.۷. مطلوب است تعیین مساحت قسمتی از سطح مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که توسط استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ جدا می‌شود (فرض شود که $a > 0$).

پاسخ: معادله استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ را به صورت $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ بازنویسی می‌کنیم. از حل معادله $z^2 = x^2 + y^2$ به $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌رسیم. بنابراین با دو سطح مواجه هستیم

$$S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}; (x, y) \in D,$$

$$S_2 : z = -\sqrt{x^2 + y^2}; (x, y) \in D,$$

که در آن $D : (x-a)^2 + y^2 \leq a^2$. معادله معرف هر دو سطح عبارت است از $f : x^2 + y^2 - z^2 = 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{\|\nabla f\|}{\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|} dx dy = \frac{\|(2x, 2y, -2z)\|}{|-2z|} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2|z|} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\text{Area}(S_1) = \iint_D d\sigma_1 = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \text{Area}(D)$$

$$= \sqrt{2} \times (\pi \times (a)^2) = \sqrt{2}\pi a^2.$$

به صورت مشابه، مساحت S_2 نیز برابر $\sqrt{2}\pi a^2$ است. بنابراین مساحت مساحت مطلوب برابر است با حاصل جمع این دو مقدار، یعنی $2\sqrt{2}\pi a^2$.

۷.۷. فرض کنید S سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ ($0 < z$) است. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F} = -2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ و این سطح تحقیق کنید.

پاسخ: چون $0 \leq z$ ، پس $0 \leq 1 - x^2 - y^2$ یا $D: x^2 + y^2 \leq 1$ ، که تصویر رویه S بر صفحه xOy است. رویه مذکور عبارت است از

$$S: f := x^2 + y^2 + z - 1 = 0; (x, y) \in D,$$

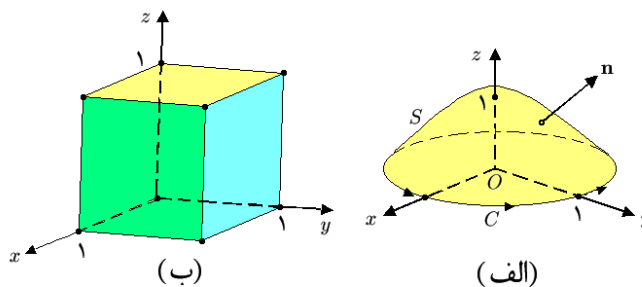
که مطابق شکل ۱۳.۲-الف)، $\mathbf{n}$ رو به بالا دارد (یعنی، مؤلفه z آن مثبت است). لبه آن عبارت است از $C: x^2 + y^2 + z - 1 = 0, z = 0$ یا $C: x^2 + y^2 = 1, z = 0$ و جهت حرکت آن نیز جهت مثلثاتی است. بنابراین C را به صورت استاندارد پارامتره می‌کنیم:

$$C: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 3\cos t, 4\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t dt = \frac{3}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

برای محاسبه این انتگرال با استفاده از قضیه استوکس، لازم است تاگرل $\mathbf{F}$ را محاسبه کنیم:



شکل ۱۳.۲: الف)
مسئله ۷ از امتحان
هفتم (ب) مسئله ۸ از
امتحان هفتم

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = (4, -2, 3)$$

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\nabla f}{|f_z|} = \pm (2x, 2y, 1) dx dy.$$

توضیح اینکه، چون $\mathbf{n}$ رو به بالا است، مؤلفه z آن مثبت است و بنابراین $\mathbf{n}$ با حالت + مورد قبول است و در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (4, -2, 3) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (8x - 4y + 3) dx dy = \iint_D (8x - 4y) dx dy + \iint_D 3 dx dy \\ &\stackrel{(1)}{=} 0 + 3 \text{Area}(D) = 3\pi. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (1) از فرد بودن تابع $8x - 4y$ بر ناحیه متقارن D استفاده کرده‌ایم. پس انتگرال آن صفر است.

۸.۷. با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال سطح $\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ را برای میدان برداری

$$\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k},$$

و سطح S خارجی مکعب $|x|, |y|, |z| \leq 1$ پیدا کنید.

پاسخ: داخل سطح مورد نظر عبارت است از مکعب واحد (به شکل ۱۳.۲-ب) توجه شود):

$$V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

به علاوه

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 3 + 2y + y = 3(y + 1).$$

بنابراین، مطابق قضیه دیورژانس

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz \\ &= 3 \left(\int_0^1 dx \right) \left(\int_0^1 dy \right) \left(\int_0^1 (z + 1) dz \right) = 3 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

۹.۷. فرض کنید C لبه ناحیه‌ای بسته، هموار و ساده به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ باشد. مطلوب است

$$\oint_C \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}$$

پاسخ: چون مبدا مختصات (یعنی $(0,0)$) در داخل منحنی C واقع است. نمی‌توان از قضیه گرین

استفاده کرد. بنابراین، بایستی مستقیماً اقدام به محاسبه انتگرال خط داده شده کرد. برای حذف ۴ از مخرج x^2 و ۹ از مخرج y^2 در معادله خم، فرض می‌کنیم $x = 2 \cos t$ و $y = 3 \sin t$ ، یعنی

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{-ydx + xdy}{4x^2 + 9y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{-(3 \sin t) d(2 \cos t) + (2 \cos t) d(3 \sin t)}{4(2 \cos t)^2 + 9(3 \sin t)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{6dt}{16 \cos^2 t + 81 \sin^2 t} \stackrel{(1)}{=} 12 \int_0^{\pi} \frac{dt}{16 \cos^2 t + 81 \sin^2 t} \\ &\stackrel{(2)}{=} 24 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{16 \cos^2 t + 81 \sin^2 t} \stackrel{(3)}{=} 24 \int_0^{\pi/2} \frac{dt / \cos^2 t}{16 + 81 \tan^2 t} \\ &\stackrel{(4)}{=} 24 \int_0^{\infty} \frac{du}{16 + 81u^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{9u}{4}\right) \right]_0^a = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از این حکم استفاده نموده‌ایم که تابع $16 \cos^2 t + 81 \sin^2 t$ با تناوب π است و در تساوی (۲) از تقارن انتگرال نسبت به $t = \pi/2$ استفاده نموده‌ایم. در تساوی (۳) صورت و مخرج را بر $\cos^2 t$ تقسیم نموده‌ایم. در (۴) فرض کرده‌ایم $u = \tan t$ و سپس انتگرال ناسره حاصل را محاسبه نموده‌ایم.

پاسخ مسایل امتحان هشتم

۱.۸. پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را بر کل $\mathbb{R}^2$ بررسی کنید.^۱

پاسخ: این تابع در همسایگی هر نقطه $X_0 \neq (0, 0)$ با تابع مقدماتی $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ برابر است و در نتیجه پیوسته می‌باشد. در مورد $X_0 = (0, 0)$ کافی است مسیر $C_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ منتهی به مبدا را در نظر می‌گیریم (یعنی، $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_\alpha(t) = (0, 0)$) که α عددی دلخواه است. در این صورت، حد f بر مسیر $\mathbf{r}_\alpha$ برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_\alpha(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\alpha t)}{\sqrt{(t)^2 + (\alpha t)^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = 0. \end{aligned}$$

پس احتمالاً حد f در مبدا موجود و برابر صفر است (زیرا لااقل بر همه خطوط گذرنده از مبدا برابر صفر است). برای اطمینان از این مطلب، باید ثابت کنیم که

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall (x, y) \left(0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon \right).$$

فرض کنیم $z = \max\{|x|, |y|\}$. چون $|y|, |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ پس $z < \delta$ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| &= \frac{|x||y|}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}} \\ &\stackrel{(1)}{<} \frac{z \times z}{\sqrt{z^2 + 0^2}} = \frac{z^2}{z} = z < \delta. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در نامساوی (۱) به جای $|x|$ یا $|y|$ (آن که بزرگتر است) z را قرار داده و به جای دیگری صفر می‌گذاریم. پس بنا به نامساوی بالا، کافی است δ را برابر ε بگیریم. بنابراین، f بر کل $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۲.۸. اگر $x = te^t$, $y = e^t \sin t$ و $z = e^t \cos t$ ، معادلات پارامتری مسیر حرکت ذره متحرکی باشند، آنگاه بردارهای $\mathbf{T}$ و انحناء κ مسیر و معادله صفحه قائم به آن را در لحظه $t = 0$ بیابید.

پاسخ: در این مسأله، خم به صورت $\mathbf{r}(t) = (te^t, e^t \sin t, e^t \cos t)$ است. بنابراین،

$$\mathbf{r}'(0) = (e^t + te^t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t \cos t - e^t \sin t)|_{t=0} = (1, 1, 1),$$

$$\mathbf{r}''(0) = (2e^t + te^t, 2e^t \cos t, 2 - e^t \sin t)|_{t=0} = (2, 2, 0),$$

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2, 0).$$

پس، بنابه فرمول‌های مربوطه،

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}'(0) = (1, 1, 1),$$

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{\|\mathbf{r}'(0)\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1+1+1}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|}{\|\mathbf{r}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (0)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

صفحه قائم بر منحنی در لحظه $t = 0$ صفحه‌ای است که از $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 1)$ عمود بر $\mathbf{T}(0)$ می‌گذرد. پس چون $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 1)$ و $\mathbf{T}(0) = (1, 1, 1)$ داریم

$$(1)(x-0) + (1)(y-0) + (1)(z-1) = 0.$$

در نتیجه معادله این صفحه عبارت است از $x + y + z = 1$.

۳.۸. حجم جسم محصور شده به رویه‌های $z = 18 - x^2 - 9y^2$ و $z = x^2 + 9y^2$ را بیابید.

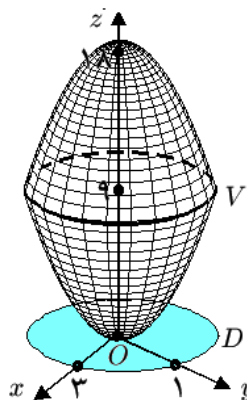
پاسخ: رویه $z = 18 - x^2 - 9y^2$ یک سهمی‌گون بیضوی رو به پایین و با رأس در ۱۸ است و $z = x^2 + 9y^2$ یک سهمی‌گون رو به بالا و با رأس در مبداء است (به شکل ۱۴.۲ توجه شود). محل برخورد این دو سطح $z = 18 - z$ یا $z = 9$ است. در این ارتفاع، $x^2 + 9y^2 = 9$. بنابراین تصویر ناحیه حاصل بر صفحه xOy بیضی $D: x^2 + 9y^2 \leq 9$ است و حجم مورد نظر عبارتست از

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \{(18 - x^2 - 9y^2) - (x^2 + 9y^2)\} dx dy \\ &= \iint_D \{18 - 2x^2 - 18y^2\} dx dy. \end{aligned}$$

برای اینکه بتوانیم عدد ۹ را فاکتور بگیریم، از مختصات قطبی وزندار استفاده می‌کنیم: $x = 3r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$. در این صورت $J = |\partial(x, y) / \partial(r, \theta)| = 3r$ و تصویر D در صفحه $rO\theta$ عبارتست از

بنابراین $D': 0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq r \leq 1$

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D'} \{18 - 18r^2\} 3r dr d\theta = 54 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^1 (r - r^3) dr \\ &= 108\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 27\pi. \end{aligned}$$



شکل ۱۴.۲: پاسخ
مسأله ۳ از امتحان
هشتم

۴.۸. نقطه‌ای بر سطح $z = xy + 1$ چنان بیابید که نسبت به مبدا مختصات دارای کوتاهترین فاصله باشد.

پاسخ: تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (یعنی مربع فاصله از مبدا) را در نظر گرفته و آن را به شرط $z = xy + 1$ اکستریم می‌کنیم. فرض کنیم $g = xy - z + 1$. پس مسأله ما عبارت از اکستریم‌گیری از f به شرط $g = 0$ است. بنابه قضیه ضریب لاگرانژ، عددی مانند λ طوری وجود دارد که $\nabla f = \lambda \nabla g$. پس دستگاهی مرکب از معادله برداری $\nabla f = \lambda \nabla g$ و معادله $g = 0$ را حل می‌کنیم؛ معادله اول خود سه معادله معمولی را باعث می‌شود؛ زیرا

$$(2x, 2y, 2z) = \nabla f = \lambda \nabla g = \lambda(y, x, -1).$$

بنابراین:

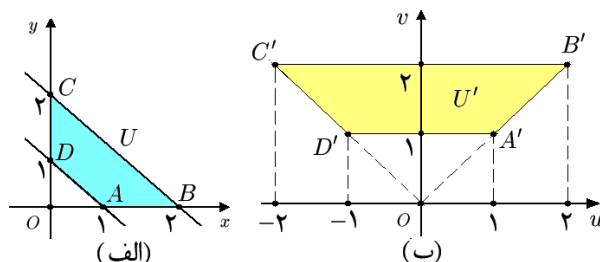
$$(1) \quad 2x = \lambda y, \quad (2) \quad 2y = \lambda x, \quad (3) \quad 2z = -\lambda, \quad (4) \quad z = xy + 1.$$

از معادله (۱) و معادله (۲) داریم $2x = \lambda y = \lambda(\lambda x/2) = \lambda^2 x/2$. در نتیجه داریم $(4 - \lambda^2)x = 0$. به صورت مشابه $(4 - \lambda^2)y = 0$. پس سه حالت را مد نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\lambda = 2$ ؛ در این صورت از معادله (۱) داریم $x = y$ و از معادله (۳) داریم $z = -1$ سپس با استفاده از معادله (۴) داریم $-1 = x^2 + 1$ یا $x^2 = -2$ که تناقض است.

(ب) اگر $\lambda = -2$ ؛ در این صورت از معادله (۱) داریم $x = -y$ و از معادله (۳) داریم $z = 1$ سپس از معادله (۴) داریم $1 = -x^2 + 1$ یا $x^2 = 0$ و $x = 0$. بنابراین $x = y = 0$ و $z = 1$ یعنی نقطه $X_1 = (0, 0, 1)$ است.

(ج) اگر $\lambda \neq 2, -2$ ؛ در این صورت از بحث بالا، داریم $x = 0$ (چون $4 - \lambda^2 \neq 0$) و $y = 0$. بنابراین $z = 1$ و لذا همان نقطه X_1 حاصل می‌شود. اما $f(X_1) = 1$. بنابراین نقطه مینیموم موضوعی مسأله عبارت از X_1 است و فاصله این نقطه تا مبدا برابر است با $\sqrt{f(X_1)} = 1$.



شکل ۱۵.۲: پاسخ مسأله ۴ از امتحان هشتم

۵.۸. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ که در آن U دوزنقه‌ای با رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(0, 2)$ واقع در صفحه xOy است.

پاسخ: ناحیه مورد انتگرال‌گیری U عبارت از (x, y) هایی است که میان خطوط $x+y=1$ ، $x+y=2$ ، $x=0$ و $y=0$ محدودند (به شکل ۱۵.۲ (a) توجه شود). چون در متغیر کسری از $x-y$ و $x+y$ آمده است و تابع $\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ چه نسبت به x و چه نسبت به y قابل انتگرال نیست، فرض می‌کنیم $u = x - y$ و $v = x + y$. بنابراین $x = \frac{u+v}{2}$ و $y = \frac{v-u}{2}$. چون تابع تغییر مختصات از (x, y) به (u, v) خطی است $((x, y) \mapsto (x-y, x+y))$ ، پس تصویر دوزنقه U ، یک چهار ضلعی در صفحه uOv خواهد بود (زیرا تصویر خط به توسط تابعی خطی، خط است). برای به دست آوردن تصویر مورد نظر U' ، رئوس U را تصویر می‌کنیم:

نقطه	x	y	u	v	تصویر نقطه
A	1	0	1	1	A'
B	2	0	2	2	B'
C	0	2	-2	2	C'
D	0	1	-1	1	D'

از ترسیم این نقاط در صفحه uOv و سپس وصل کردن آنها به یکدیگر، U' حاصل می‌شود (به شکل ۱۵.۲ (ب) توجه شود). در این شکل خط $A'B'$ به معادله $\frac{u-1}{2-1} = \frac{v-1}{2-1}$ یا $u = v$ است و خط $D'C'$ به معادله $\frac{u+1}{-2+1} = \frac{v-1}{2-1}$ یا $u = -v$ می‌باشد؛ بنابراین

$$U' = \{(u, v) | 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}.$$

از سوی دیگر

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{2}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_U \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy &= \iint_{U'} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du \right] dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \right]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (v \sin(1) - v \sin(-1)) dv = \sin(1) \int_1^2 v dv = \frac{3}{2} \sin(1). \end{aligned}$$

۶.۸. مشتق سویی (جهتدار) تابع $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ را در نقطه دلخواهی از سطح به معادله $xy + yz + zx = 0$ و در امتداد $\text{grad}(f)$ بیابید.

پاسخ: در این حالت، $\text{grad}(f) = \nabla f = (y+z, x+z, x+y)$ و بنابراین، مشتق f در امتداد $\text{grad}(f)$ برابر است با

$$\begin{aligned} D_{\text{grad}(f)} f(x,y,z) &= \nabla f(x,y,z) \cdot \frac{\text{grad}(f)}{\|\text{grad}(f)\|} = \frac{\|\nabla f\|^2}{\|\nabla f\|} = \|\nabla f\| \\ &= \left\{ 2(x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{xy + xz + yz}_{(1)}) \right\}^{1/2} = \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)}. \end{aligned}$$

توضیح اینکه به دلیل قرار داشتن نقطه (x,y,z) بر رویه داده شده، عبارت (۱) صفر است.

۷.۸. مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $\iint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ که S سطح جسم حاصل از تلاقی استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = a$ است.

پاسخ: چون با تغییر متغیر $x \mapsto -x$ و نیز $y \mapsto -y$ نه تابع $x^2 + y^2 + z^2$ تغییر می‌کند و نه معادله استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و معادلات دو صفحه $z = 0$ و $z = a$ ، بنابراین ما با انتگرالی از تابع زوج بر ناحیه‌ای متقارن مواجه هستیم. به همین دلیل کافی است تنها در یک هشتم اول محاسبات را انجام داده و حاصل را چهار برابر کنیم. در یک هشتم اول سه رویه وجود دارد:

$$\begin{aligned} S_1 : y &= \sqrt{1-x^2}; & (x,z) &\in D_1 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq a, \\ S_2 : z &= a; & (x,y) &\in D_2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \\ S_3 : z &= 0; & (x,y) &\in D_3 = D_2. \end{aligned}$$

در این صورت معادله معرف سطح S_1 عبارت از $f_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0$ است، معادله معرف سطح S_2 عبارت از $f_2 = z - a = 0$ و سطح S_3 عبارت است از $f_3 = z = 0$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{\|\nabla f_1\|}{|\partial f_1 / \partial y|} dx dz = \frac{\|(2x, 2y, 0)\|}{|2y|} dx dz, \\ &= \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 0}}{2|y|} dx dz = \frac{dx dz}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ d\sigma_2 &= \frac{\|\nabla f_2\|}{|\partial f_2 / \partial z|} dx dy = \frac{\|(0, 0, 1)\|}{|1|} dx dy = dx dy, \\ d\sigma_3 &= \frac{\|\nabla f_3\|}{|\partial f_3 / \partial z|} dx dy = \frac{\|(0, 0, 1)\|}{|1|} dx dy = dx dy, \end{aligned}$$

و در ادامه، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S_1)} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma &= \iint_{D_1} (1 + z^2) \frac{dx dz}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \right) \left(\int_0^a (1 + z^2) dz \right) \\ &= \left[\arcsin x \right]_0^1 \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_0^a = \frac{\pi}{2} \left(a + \frac{a^3}{3} \right), \\ \iint_{(S_2)} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma &= \iint_{D_2} (x^2 + y^2 + a^2) dx dy \\ &= \iint_{D'} (r^2 + a^2) r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \int_0^1 (r^2 + a^2) r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} + a^2 \frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{8} (1 + 2a^2), \\ \iint_{(S_3)} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma &= \iint_{D_3} (x^2 + y^2 + 0) dx dy \\ &= \iint_{D'} r^3 dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma &= \frac{\pi}{2} \left(a + \frac{a^3}{3} \right) + \frac{\pi}{8} (1 + 2a^2) + \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{\pi}{12} (3 + 6a + 3a^2 + 2a^3). \end{aligned}$$

بنابراین، پاسخ مسأله عبارت است از چهار برابر مقدار بالا، یعنی

$$\frac{\pi}{3} (3 + 6a + 3a^2 + 2a^3).$$

۸.۸. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ در صورتی تحقیق کنید که C مرز قسمت جدا شده از صفحه $x + y + z = 1$ توسط صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 0$ باشد.

پاسخ: ابتدا صفحه $x + y + z = 1$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۲-الف). روشن است که مرز ناحیه جدا شده از آن توسط صفحات مختصاتی، مثلی است با رئوس در $P(1,0,0)$ ، $Q(0,1,0)$ و $R(0,0,1)$. بنابراین مرز آن را (که C می‌نامیم) به صورت زیر می‌شود پارامتره کرد:

$$PQ : \mathbf{r}(t) = (1-t)P + tQ = (1-t, t, 0); \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$QR : \mathbf{r}(t) = (1-t)Q + tR = (0, 1-t, t); \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$RP : \mathbf{r}(t) = (1-t)R + tP = (t, 0, 1-t); \quad 0 \leq t \leq 1.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_{PQ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(1-t, t, 0) \cdot (-1, 1, 0) dt \\ &= \int_0^1 (t(1-t), 0, 0) \cdot (-1, 1, 0) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

به دلیل تشابه موجود در مسأله،

$$\int_{QR} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{RP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{PQ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{6}.$$

در نتیجه، $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ که عبارت از مجموع این سه مقدار است، برابر $3 \times \frac{-1}{6} = -\frac{1}{2}$ می‌باشد. برای محاسبه توسط قضیه استوکس، لازم است تا کرل $\mathbf{F}$ را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} \\ &= (0 - y, 0 - z, 0 - x) = (-y, -z, -x). \end{aligned}$$

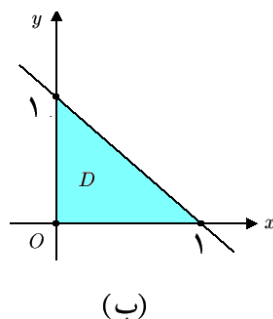
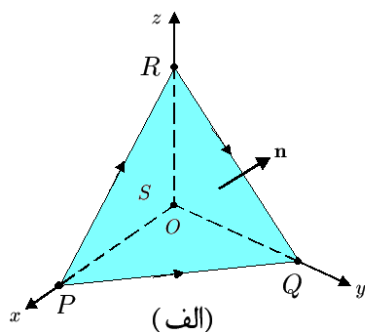
از طرفی، رویه مورد نظر عبارت است از $D : f = x + y + z - 1 = 0; (x, y) \in D$ که در آن D مثلث آمده در شکل ۱۶.۲-ب) می‌باشد: $D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ بنابراین:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\|\nabla f\|}{\|\nabla f\|} = \pm \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1+1+1}} = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

که چون در شکل ۱۶.۲-الف) بردار $\mathbf{n}$ رو به بالا است، پس باید مؤلفه z آن مثبت باشد. بنابراین حالت + مورد قبول است. بعلاوه

$$d\sigma = \pm \frac{\|\nabla f\|}{|\frac{\partial f}{\partial z}|} dxdy = \frac{\sqrt{3}}{|1|} dxdy = \sqrt{3} dxdy.$$

در نتیجه،



شکل ۱۶.۲: پاسخ
مسأله ۸ از امتحان
هشتم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (-y, -z, -x) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \sqrt{3} dxdy \\ &= - \iint_D (x+y+z) dxdy \stackrel{(1)}{=} - \iint_D dxdy \\ &\stackrel{(2)}{=} -\text{Area}(D) = -\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از این واقعیت که (x, y, z) بر S واقع است و در نتیجه $x+y+z=1$ ، استفاده کرده‌ایم. در تساوی (۲) از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که انتگرال تابع یک بر هر ناحیه‌ای، برابر مساحت آن ناحیه می‌شود.

پاسخ مسایل امتحان نهم

۱.۹. معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط متقاطع زیر باشند: ^۱

$$\ell_1: \begin{cases} 3x+2y+z+2=0, \\ x-y+2z-1=0, \end{cases} \quad \ell_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}.$$

پاسخ: می‌دانیم که اگر سه نقطه غیر واقع در یک امتداد از صفحه‌ای معلوم شود، آن صفحه مشخص شده است. اگر در معادلات $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$ فرض کنیم $x=2$ ، آنگاه نتیجه می‌شود که $y=-3$ و $z=-2$. یعنی $P_1 = (2, -3, -2)$ نقطه‌ای از این خط، و لذا نقطه‌ای از صفحه مورد نظر ما است. به صورت مشابه با قرار دادن $x=6$ در آن معادلات، نتیجه می‌گیریم که $1 = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$ یا $y=-4$ و $z=1$. بنابراین $P_2 = (6, -4, 1)$ نیز بر آن صفحه واقع است. نقطه سوم را از خط دیگری می‌گیری. به همین منظور در معادلات معرف آن فرض می‌کنیم $x=0$ ، پس

$$2y+z+2=0, \quad -y+2z-1=0,$$

و لذا $z=0$ و $y=-1$. بنابراین $P_3 = (0, -1, 0)$ بر صفحه مورد نظر واقع است. در نتیجه، معادله صفحه مورد نظر عبارت است از

$$(X - P_1) \cdot ((P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)) = 0.$$

یا به بیان دیگر،

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z+2 \\ 6-2 & -4+3 & 1+2 \\ 0-2 & -1+3 & 0+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z+2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{پس } -4x - 7y + 3z - 7 = 0 \text{ یا } -8(x-2) - 14(y+3) + 6(z+2) = 0.$$

۲.۹. پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + e^y)/(x-1) & x > 1 \\ 1/(x+1) & x > -1 \\ 0 & |x| \leq 1 \end{cases}$$

را در کلیه نقاط صفحه مختصات بررسی کنید.

پاسخ: فرض کنیم $X_0 = (x_0, y_0)$. بسته به وضعیت x_0 ، پنج حالت به شرح زیر را در نظر می‌گیریم:

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

الف) اگر $x_0 < -1$ ؛ در این حالت ضابطه f در یک همسایگی از X_0 به صورت $\frac{1}{x+1}$ است که از کسری از توابع پیوسته و با مخرج مخالف صفر است، پس f در X_0 پیوسته است.

ب) اگر $x_0 = -1$ ؛ در این صورت f در X_0 ناپیوسته است، چرا که اگر مسیر $\mathbf{r}(t) = (t, y_0)$ آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow -1+} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow -1+} 0 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1-} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow -1-} \frac{1}{t+1} = -\infty.$$

پس حد مسیری f بر مسیر C موجود نیست. بنابراین حد f در نقطه X_0 موجود نیست.

ج) اگر $-1 < x_0 < 1$ ؛ در این صورت f در یک همسایگی از X_0 با ضابطه 0 است، که به وضوح تابعی پیوسته است.

د) اگر $x_0 = 1$ ؛ در این صورت f در X_0 ناپیوسته است، چرا که اگر مسیر $\mathbf{r}(t) = (t, y_0)$ آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow 1+} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t^2 + e^{y_0}}{t-1} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 1-} 0 = 0.$$

سپس حد مسیری f بر مسیر $\mathbf{r}$ موجود نیست. بنابراین حد f در X_0 موجود نیست.

ه) اگر $x_0 < 1$ ؛ در این صورت f در همسایگی از X_0 به صورت $\frac{x^2 + e^y}{x-1}$ است که کسری از توابع پیوسته با مخرج مخالف صفر است، پس در X_0 پیوسته است.

نتیجه اینکه f در کل $\mathbb{R}^2$ به جز بر خط $x = 1$ و خط $x = -1$ پیوسته است.

۳.۹. فرض کنید $z = x^3 + y^3$ ، $x^2 + y^2 = t$ و $2x + 3y = t^3$ ، مطلوب است محاسبه dz/dt .

پاسخ: اگر از طرفین رابطه $z = x^3 + y^3$ نسبت به t مشتق بگیریم، به دست می‌آوری $\frac{dz}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} + 3y^2 \frac{dy}{dt}$. پس لازم است که $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور از دو طرف تساویهای $x^2 + y^2 = t$ و $2x + 3y = t^2$ نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$1) \quad 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 1, \quad 2) \quad 2 \frac{dx}{dt} + 3 \frac{dy}{dt} = 2t.$$

برای حل دستگاه معادلات، اگر دو طرف معادله (۲) را در $-2y$ و دو طرف معادله (۱) را در 3 ضرب کنیم و سپس د معادله حاصل را با هم جمع کنیم، به دست آوریم: $\frac{dx}{dt} = \frac{3-4y}{6x-4y}$ و یا اینکه

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3-4y}{6x-4y} \quad \text{و با قرار دادن این مقدار در معادله (۲) داریم}$$

$$2 \frac{3-4y}{6x-4y} + 3 \frac{dy}{dt} = 2t,$$

و یا اینکه $\frac{dy}{dt} = \frac{2xt-1}{3x-2y}$ در نتیجه

$$\frac{dz}{dt} = 3x^2 \frac{3-4yt}{6x-4y} + 3y^2 \frac{2xt-1}{3x-2y}.$$

۴.۹. بردارهای سرعت، شتاب و نیز انحنا و تاب منحنی مسیر حرکت یک نقطه مادی به معادله

$$C : \mathbf{r}(t) = (\tan t, t, 2t^2 + \tan t); \quad t \in [0, \pi/4],$$

را در لحظه شروع حرکت بیابید.

پاسخ: لحظه شروع عبارت از $t = 0$ است. در نتیجه

$$\mathbf{r}'(0) = (1 + \tan^2 t, 1, 4t + 1 + \tan^2 t)|_{t=0} = (1, 1, 1),$$

$$\mathbf{r}''(0) = (2 \tan t + 2 \tan^3 t, 0, 4 + 2 \tan t + 2 \tan^3 t)|_{t=0} = (0, 0, 4),$$

$$\mathbf{r}'''(0) = (2 + 8 \tan^2 t + 6 \tan^4 t, 0, 2 + 8 \tan^2 t + 6 \tan^4 t)|_{t=0} = (2, 0, 2),$$

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (4, -4, 0).$$

پس، بنابه تعریف سرعت، شتاب، انحنا و تاب در لحظه شروع، به ترتیب عبارتند از

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}'(0) = (1, 1, 1),$$

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{r}''(0) = (0, 0, 4),$$

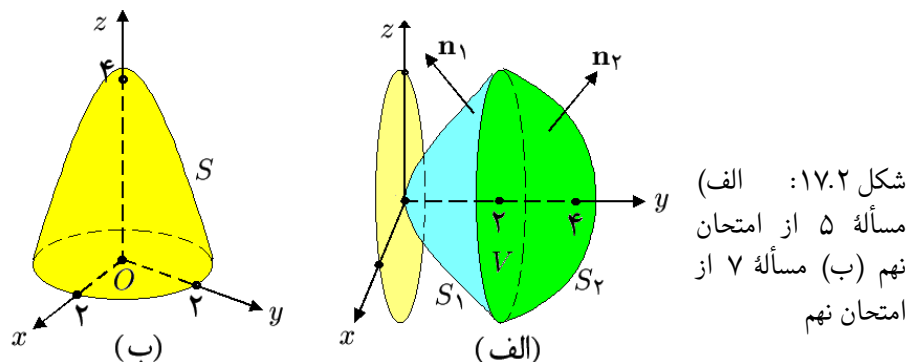
$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|}{\|\mathbf{r}'(0)\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{16+16+0}}{(\sqrt{1+1+1})^3} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(0) &= \frac{(\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)) \cdot \mathbf{r}'''(0)}{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|^2} \\ &= \frac{(4, -4, 0) \cdot (2, 0, 2)}{(\sqrt{16+16+0})^2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

۵.۹. کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و سیله رویه $x^2 + z^2 = 6y$ قطع شده است. اولاً حجم و سطح جسم پیدا کند که درون هر دو سطح قرار گرفته باشد. ثانیاً گشتاور ماند (مان اینرسی) جسم مورد نظر را نسبت به محور y ها به دست آورید در صورتیکه بدانیم جرم مخصوص هر نقطه از ناحیه مقدار ثابت ۱ باشد.

پاسخ: کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و سهمیگون بیضوی $x^2 + z^2 = 6y$ را قطع داده به معادله $y^2 + 6y = 16$ و یا $y^2 + 6y - 16 = 0$ می‌رسیم. پس $y = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$ یا $y = \frac{-6+10}{2}$ یعنی، $y = 2$ یا $y = -8$. چون

در کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ هیچ‌گاه y برابر ۸- نمی‌شود ($-4 \leq y \leq 4$) پس $y = -8$ جواب خارجی است و $y = 2$ را می‌پذیریم. لذا مقطع کره و سهمی گون داده شده، دایره $y = 2$ و $C : x^2 + z^2 = 6y$ است. به بیان دیگر، دایره $y = 2$ و $C : x^2 + z^2 = 12$ (به شکل ۱۷.۲-الف) توجه شود). نتیجه این



موضوع، آن است که تصویر ناحیه مورد بحث بر صفحه xOz عبارت از $D : x^2 + z^2 \leq 12$ است. اما اگر (x, y, z) در حجم مورد نظر واقع باشد، آنگاه مطابق (شکل ۱۷.۲-الف) بایستی y از سهمیگون بزرگتر، و از کره کوچکتر باشد. معادله سهمی گون $y = (x^2 + z^2)/6$ است و معادله کره عبارت است از $y = \pm \sqrt{16 - x^2 - z^2}$ که حالت مثبت مورد قبول است. بنابراین

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid (x, z) \in D, \frac{1}{6}(x^2 + z^2) \leq y \leq \sqrt{16 - x^2 - z^2} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \iiint_V dx dy dz = \iint_D \left[\int_{(x^2+z^2)/6}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} dy \right] dx dz \\ &= \iint_D \left(\sqrt{16 - x^2 - z^2} - \frac{x^2 + z^2}{6} \right) dx dz \stackrel{(1)}{=} \iint_{D'} \left(\sqrt{16 - r^2} - \frac{1}{6}r^3 \right) r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{16 - r^2} r - \frac{r^3}{6} \right) dr = -\frac{2\pi}{3} \left[(16 - r^2)^{3/2} + \frac{r^4}{8} \right]_0^{\sqrt{12}} = \frac{76}{3}\pi. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تساوی (۱) از تغییر متغیر استاندارد $x = r \cos \theta$ و $z = r \sin \theta$ استفاده کرده‌ایم. در این صورت $J = r$ و تصویر D عبارت است از

$$D' : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{12}$$

برای محاسبه مساحت سطح خارجی V ، ابتدا این سطح S را به صورت دو تکه معرفی می‌کنیم:

$$S_1 : f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 16; y \leq 2; (x, z) \in D,$$

$$S_2 : f_2 = x^2 + z^2 - 6y; (x, z) \in D.$$

سپس، مطابق معمول، داریم

$$d\sigma_1 = \frac{\|\nabla f_1\|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|} dx dz = \frac{\|(2x, 2y, 2z)\|}{|2y|} dx dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{|2y|} dx dz = \frac{4}{y} dx dz = \frac{4 dx dz}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}}. \\
 d\sigma_2 &= \frac{\|\nabla f_2\|}{|\frac{\partial f_2}{\partial y}|} dx dz = \frac{\|(2x, -6, 2z)\|}{|-6|} dx dy \\
 &= \frac{\sqrt{4x^2 + 36 + 4z^2}}{|6|} dx dz = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + z^2 + 9} dx dz.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(S_1) &= \iint_{(S_1)} d\sigma = \iint_D \frac{4 dx dz}{\sqrt{16 - x^2 - z^2}} \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{12}} \frac{4r dr}{\sqrt{16 - r^2}} \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-4(16 - r^2)^{1/2} \right]_0^{\sqrt{12}} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 8 d\theta = 8[\theta]_0^{2\pi} = 16\pi, \\
 \text{Area}(S_1) &= \iint_{S_2} d\sigma = \iint_D \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + z^2 + 9} dx dz \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{12}} \sqrt{r^2 + 9} r dr \right] d\theta = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} \left[(r^2 + 9)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{12}} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (7\sqrt{21} - 9) d\theta = \frac{2\pi}{3} (7\sqrt{21} - 9).
 \end{aligned}$$

بنابراین مساحت سطح خارجی V برابر است با مجموع مساحت این دو قطعه، یعنی

$$\text{Area}(S) = 16\pi + \frac{2\pi}{3} (7\sqrt{21} - 9).$$

برای محاسبه گشتاور ماند حول محور y ها از فرمول کلاسیک

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \delta dx dy dz,$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \delta dx dy dz = \iint_D \left[\int_{(x^2+z^2)/6}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} (x^2 + z^2) dy \right] dx dz \\
 &= \iint_D (x^2 + z^2) \left(\sqrt{16 - x^2 - z^2} - \frac{x^2 + z^2}{6} \right) dx dz \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{\sqrt{12}} r^2 \left(\sqrt{16 - r^2} - \frac{r^2}{6} \right) r dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{12}} r^3 \sqrt{16-r^2} dr - \frac{\pi}{3} \int_0^{\sqrt{12}} r^5 dr \\
 &\stackrel{(1)}{=} 2\pi \int_2^4 u^2 (16-u^2) du - \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{12}} \\
 &= 2\pi \left[16 \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_2^4 - \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{12}} = \frac{1568}{15} \pi.
 \end{aligned}$$

توضیح اینکه در تغییر (۱) متغیر $u^2 = 16 - r^2$ ، استفاده شده است.

۶.۹. مطلوب است $\int_C (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz$ که در آن C مارپیچ

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht/2\pi, \quad t \in [0, 2\pi],$$

است و h عدد ثابتی است.

پاسخ: میدان برداری مورد بحث $\mathbf{F} = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 \text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix} \\
 &= (-x + x, -y + y, -z + z) = (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

بنابراین میدان $\mathbf{F}$ ابقائی (کانسرواتیو) است. برای به دست آوردن پتانسیل آن، با فرض ثابت بودن (z, y, x) از میدان $\mathbf{F}$ بر منحنی $\mathbf{r}(t) = (tx, ty, tz)$; $0 \leq t \leq 1$ انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \int_E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_0^1 \{ ((xt)^2 - (yt)(zt)) d(xt) + ((yt)^2 - (zt)(xt)) d(yt) + ((zt)^2 - (xt)(yt)) d(zt) \} \\
 &= \int_0^1 \{ (x^2 - zy)t^2 x dt + (yz^2 - zx)t^2 y dt + (z^2 - xy)t^2 z dt \} \\
 &= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \int_0^1 t^2 dt = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - xyz.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 &f(\text{ابتدای مسیر}) - f(\text{انتهای مسیر}) = \text{انتگرال خواسته شده} \\
 &= f(\mathbf{r}(2\pi)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(a, 0, h) - f(a, 0, 0) \\
 &= \left(\frac{a^3}{3} + 0 + \frac{h^3}{3} - 0 \right) - \left(\frac{a^3}{3} + 0 + 0 - 0 \right) = \frac{h^3}{3}
 \end{aligned}$$

۷.۹. مطلوب است محاسبه سطح قسمتی از رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ که در بالای صفحه xOy واقع شده است.

پاسخ: بالای صفحه xOy مجموعه نقاطی است که برای آنها $0 \leq z$. پس بایستی $0 \leq 4 - x^2 - y^2$ یا $x^2 + y^2 \leq 4$. بنابراین، D .

$$S : f = x^2 + y^2 + z - 4 = 0; (x, y) \in D.$$

این سطح عبارت از یک سهمیگون است به رأس در $(0, 0, 4)$ و رو به پایین است (به شکل ۱۷.۲-ب) توجه شود).

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\|\nabla f\|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} dx dy = \frac{\|(2x, 2y, 1)\|}{|1|} dx dy \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{(S)} d\sigma = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \iint_{D'} \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

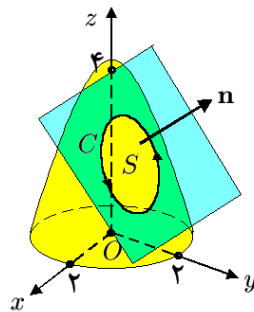
توضیح اینکه در تساوی (۱) از تغییر مختصات قطبی استفاده کرده‌ایم. تصویر D عبارت است از $D' : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$.

۸.۹. منحنی C از تلاقی صفحه $z = 5 - 2x - 2y$ و سطح $z = -x^2 - y^2 + 4$ حاصل شده است. اگر $\mathbf{F} = (x, y, z + x)$ ، آنگاه مطلوب است محاسبه $W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ و تحقیق قضیه استوکس بر یکی از سطوح محدود شده مذکور به منحنی C .

پاسخ: سهمیگون $z = 4 - x^2 - y^2$ با رأس در ۴ و رو به پایین است. صفحه $z = 5 - 2x - 2y$ محدود z ها را در ۵ و محور x ها و محور y ها را در $5/2$ قطع می‌کند (به شکل ۱۸.۲ توجه شود). منحنی جدا شده توسط صفحه از سهمیگون عبارتست از: $C : z = -x^2 - y^2 + 4, z = 5 - 2x - 2y$. از حل دو معادله داده شده در یک دستگاه، به دست می‌آوریم

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad -x^2 - y^2 + 4 = 5 - 2x - 2y$$

بنابراین، پس از مربع کامل کردن، داریم $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ؛ که دایره‌ای به مرکز $(1, 1)$ و شعاع یک در صفحه xOy است. یعنی، تصویر قسمت جدا شده از سطح، بر صفحه xOy عبارت است از



شکل ۱۸.۲: پاسخ
مسئله ۸ از امتحان نهم

$D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. فرض کنیم که C لبه سطح

$$S: f = 2x + 2y + z - 5 = 0; (x, y) \in D,$$

است و n رو به بالا است (یعنی، مؤلفه z آن مثبت است) زیرا باید همواره «روی سطح» در سمت چپ «بردار مماس به منحنی» C باشد (به شکل ۱۸.۲ توجه شود).
برای محاسبه $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ باید منحنی C را پارامتره کنیم:

$$C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, z = 5 - 2x - 2y.$$

کافی است فرض کنیم $x - 1 = \cos t$ و $y - 1 = \sin t$ ، بنابراین، با قرار دادن این مقادیر در رابطه داریم $z = 1 - 2\cos t - 2\sin t$. در نتیجه

$$C: \mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 1 - 2\cos t - 2\sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(1 + \cos t, 1 + \sin t, 1 - 2\cos t - 2\sin t) \\ &\quad \cdot (-\sin t, \cos t, 2\sin t - 2\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t, 1 + \sin t, 2 - \cos t - 2\sin t) \cdot \\ &\quad (-\sin t, \cos t, 2\sin t - 2\cos t) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} (2\cos t \sin t - 3\cos t + 3\sin t) dt \\ &= 2\pi - 4\pi + 0 = -2\pi. \end{aligned}$$

برای محاسبه W با استفاده از قضیه استوکس لازم است که کرل $\mathbf{F}$ را بیابیم:

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z+z \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0, 0 - 1, 0 - 0) = (0, -1, 0).$$

به علاوه

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \pm \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{4+4+1}} = \pm \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

که چون $\mathbf{n}$ رو به بالا است، باید مؤلفه z مثبت باشد، و لذا حالت $+$ مورد قبول است. همچنین

$$d\sigma = \frac{\|\nabla f\|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} dxdy = \frac{\sqrt{4+4+1}}{|1|} dxdy = 3dxdy.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (0, -1, 0) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) 3dxdy \\ &= \iint_D (-2) dxdy = -2\text{Area}(D) = -2\pi. \end{aligned}$$

این خواسته ما را برآورده می‌کند یعنی ثابت می‌کند که

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

پاسخ مسایل امتحانی دهم

۱.۱۰. معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $P(1, 2, 3)$ گذشته و موازی صفحه قائم بر رویه‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و $3x - y - 5y^2 = 7$ در نقطه $P_0(1, 0, -1)$ باشد^۱

پاسخ: می‌دانیم که اگر $f(x, y, z) = 0$ یک رویه باشد و $X_0 \in S$ ، آنگاه $\nabla f|_{X_0}$ در نقطه X_0 به S عمود است. به علاوه صفحه با بردار قائم $\mathbf{n}$ در صورتی بر S عمود است که $\mathbf{n}$ بر $\nabla f|_{X_0}$ عمود باشد. بنابراین، مطابق فرض مسأله، $\mathbf{n}$ عمود بر $\nabla f_1|_{P_0}$ است و نیز عمود بر $\nabla f_2|_{P_0}$ که در اینجا $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ و $f_2 = 3x - y - 5y^2 - 7$. اما از طرفی

$$\begin{aligned}\nabla f_1|_{P_0} &= (2x, 2y, 2z)|_{P_0} & \nabla f_2|_{P_0} &= (3, -1 - 10y, 0)|_{P_0} \\ &= (2, 0, -2), & &= (3, -1, 0).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \nabla f_1|_{P_0} \times \nabla f_2|_{P_0} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -6, -2).\end{aligned}$$

پس معادله صفحه‌ای که از P عمود بر $\mathbf{n}$ می‌گذرد، عبارتست از

$$-2(x-1) - 6(y-2) - 2(z-3) = 0,$$

$$\text{یا } x + 3y + z = 10.$$

۲.۱۰. بردارهای سرعت و شتاب و مقدار شعاع انحناء منحنی

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, \sin(e^t + 1), \cos(e^t + 1)),$$

را به ازای $t = 0$ بیابید.

پاسخ: برای به دست آوردن اشیاء مورد نظر، لازم است $\mathbf{r}'(0)$ و $\mathbf{r}''(0)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (e^t, e^t \cos(e^t + 1), -e^t \sin(e^t + 1))|_{t=0} \\ &= (1, \cos 2, -\sin 2),\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}''(0) = (e^t, e^t \cos(e^t + 1) - e^{2t} \sin(e^t + 1), -e^t \sin(e^t + 1) - e^{2t} \cos(e^t + 1))|_{t=0}$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

$$= (1, \cos 2 - \sin 2, -\sin 2, -\cos 2),$$

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \cos 2 & -\sin 2 \\ 1 & \cos 2 - \sin 2 & -\sin 2 - \cos 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1, \cos 2, -\sin 2).$$

بنابراین، سرعت متحرک در $t = 0$ برابر $\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}'(0) = (1, \cos 2, -\sin 2)$ است و شتاب آن برابر $\mathbf{a}(0) = \mathbf{r}''(0) = (1, \cos 2, -\sin 2, -\sin 2 - \cos 2)$ است. به علاوه انحناء منحنی در $t = 0$ برابر است با

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|}{\|\mathbf{r}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (\cos 2)^2 + (-\sin 2)^2}}{\left(\sqrt{(1)^2 + (\cos 2)^2 + (-\sin 2)^2}\right)^3} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، شعاع انحناء در $t = 0$ برابر است با $R(0) = 1/\kappa(0) = 2$.

۳.۱۰. تابع $z = \ln(x + 1/y)$ در کدام نقاط پیوسته نیست، نقطه‌ای را تعیین کنید که گرادیان این تابع در این نقطه برابر بردار $\mathbf{j} - (16/9)\mathbf{i}$ باشد، همچنین $\text{div}(\text{grad}(z))$ را محاسبه کنید.

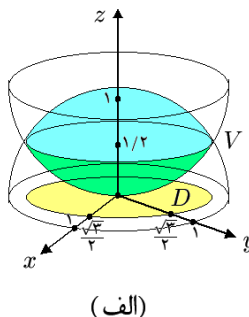
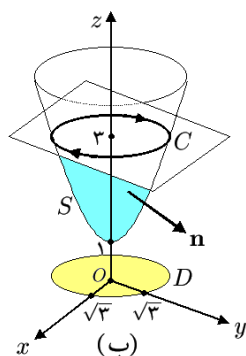
پاسخ: تابع $f(x, y) = \ln(x + 1/y)$ مقدماتی است، پس در هر کجا که تعریف شود پیوسته است. بنابراین، کافی است که دامنه f را مشخص کنیم: شرط تعریف شدن $\ln(x + 1/y)$ این است که $x + 1/y > 0$. یعنی، f در (x, y) هایی پیوسته است که $0 < x + 1/y$ و (x, y) هایی ناپیوسته است که $x + 1/y \leq 0$ ، همچنین

$$\text{grad}(z) = \left(\frac{1}{x + 1/y}, \frac{-1/y^2}{x + 1/y} \right).$$

پس اگر بنا باشد $\text{grad}(z) = \mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}$ ، آنگاه $\frac{1}{x + 1/y} = 1$ و $\frac{-1/y^2}{x + 1/y} = -\frac{16}{9}$. پس، از قرار دادن تساوی اول در تساوی دوم، داریم $\frac{-1}{y^2} = -\frac{16}{9}$ یا $y^2 = \frac{9}{16}$. بنابراین، $y = \pm \frac{3}{4}$.

حال اگر $y = \frac{3}{4}$ ، آنگاه $\frac{1}{x + 4/3} = 1$ یا $\frac{-1}{x + 4/3} = 1$ ؛ و اگر $y = -\frac{3}{4}$ ، آنگاه $\frac{1}{x - 4/3} = 1$ یا $\frac{-1}{x - 4/3} = 1$. پس نقاط مورد نظر عبارتند از $X_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ و $X_2 = (\frac{7}{3}, \frac{-3}{4})$. برای محاسبه $\text{div}(\text{grad}(z))$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad}(z)) &= \text{div}\left(\frac{1}{x + 1/y}, \frac{-1/y^2}{x + 1/y}\right) = \text{div}\left(\frac{y}{xy + 1}, \frac{-1}{xy^2 + y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{xy + 1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{xy^2 + y}\right) \\ &= \frac{-y^2}{(xy + 1)^2} + \frac{2xy + 1}{(xy^2 + y)^2} = \frac{-y^4 + 2xy + 1}{(xy^2 + y)^2}. \end{aligned}$$



شکل ۱۹.۲: (الف) مسأله ۴ از امتحان دهم (ب) مسأله ۷ از امتحان دهم

۴.۱۰. گشتاور ماند ناحیه D داخل بیضی به معادله $x^2 + y^2/4 = 1$ با چگالی ثابت k نسبت به محور z ها را بیابید.

پاسخ: ناحیه $D : x^2 + y^2/4 \leq 1$ در صفحه xOy واقع است و محور z ها در $O = (0, 0)$ به این صفحه عمود است. پس گشتاور حول محور z ها به معنی گشتاور حول O است. یعنی بایستی $I_0(D) = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy$ را محاسبه کنیم، که در اینجا $\delta(x, y) = k$. برای حل این انتگرال، از تغییر مختصات $x = r \cos \theta$ و $y = 2r \sin \theta$ استفاده می‌کنیم، تا مخرج ۴ در y^2 حذف شود. اما در این صورت تصویر D در صفحه $rO\theta$ عبارت است از $D' : r^2 \leq 1$ یا

$$D' : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1.$$

به علاوه

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2r \cos \theta \end{bmatrix} \right| = 2r.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} I_0(D) &= \iint_D (x^2 + y^2) k dx dy = k \iint_{D'} r^2 (\cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta) \times 2r dr d\theta \\ &= 2k \left(\int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \\ &= 2k \left(\frac{9}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \right) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = 2k \times 9\pi \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2} k\pi. \end{aligned}$$

۵.۱۰. مطلوبست محاسبه $I = \iiint_V z^2 dx dy dz$ که در آن ناحیه V محصور به کره‌های توپر $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ می‌باشد.

پاسخ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ معادله کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع یک است. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ پس از

۱۰۰۲. پاسخ مسایل امتحان دهم ۱۰۳ فصل ۲. پاسخ مسایل

مربع کامل کردن به صورت $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ نوشته می شود که معادله کره ای به مرکز $(0,0,1)$ و شعاع یک است (به شکل ۱۹.۲-الف) توجه شود).

محل برخورد این دو کره، $2z = 1$ یا $z = 1/2$ است. بنابراین با قرار دادن $z = 1/2$ در هر یک از معادلات داده شده، به دست می آوریم که $x^2 + y^2 = 3/4$. بنابراین تصویر حجم V بر صفحه xOy عبارت است از $D: x^2 + y^2 \leq (\sqrt{3}/2)^2$.

همانطوری که در شکل ۱۹.۲-الف) دیده می شود، از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ نیمه بالایی، یعنی $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ در بالای شکل واقع است و نیمه پایینی کره $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ، یعنی $z = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2}$ در پایین شکل واقع است. به بیان دیگر

$$V = \left\{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D, 1 - \sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}.$$

پس، تصویر V در فضای $Or\theta z$ عبارت است از

$$V' = \left\{ (r,\theta,z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2} \right\}.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 dx dy dz &= \iiint_{V'} (r \cos \theta)^2 r dr d\theta dz \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r^3 dz \right] dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[zr^3 \right]_{z=1-\sqrt{1-r^2}}^{z=\sqrt{1-r^2}} dr = \pi \int_0^{\sqrt{3}/2} (2\sqrt{1-r^2} - 1) r^3 dr \\ &\stackrel{(1)}{=} \pi \left(\int_1^{1/2} (2u-1)(1-u^2)(-u du) \right) \\ &= \pi \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} \right]_1^{1/2} = \frac{53\pi}{1920}. \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $u = \sqrt{1-r^2}$.

۶.۱۰. انتگرال سطح $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ که در آن S کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است را محاسبه کنید.

پاسخ: چون سطح S بسته است و میدان برداری $\mathbf{F} = (x,y,z)$ پیوسته و مشتق پذیر است، پس از قضیه دیورژانس می شود استفاده کرد. اما داخل S عبارت است از کره توپر $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ و

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz \\ &= \iiint_V 3 \, dx dy dz = 3 \operatorname{Vol}(V) \\ &= 3 \times \left(\frac{4}{3} \times \pi \times (1)^3 \right) = 4\pi.\end{aligned}$$

توضیح اینکه حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با $4\pi R^3/3$.

۷.۱۰. درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\mathbf{F} = (x+y, z, y)$ و سطح S که قسمتی از سطح $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ محدود به صفحه $z = 2$ است، تحقیق کنید.

پاسخ: معادله $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ را به صورت $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ بازنویسی می‌کنیم. پس رویه مورد نظر قسمتی از هزلولی‌گون دوپارچه $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ است که محور تقارن آن محور z ها است (به شکل ۱۹.۲- (ب) توجه شود) از قرار دادن $z = 2$ در معادله هزلولی‌گون به دست آوریم $x^2 + y^2 = 3$ پس تصویر رویه بر صفحه xOy عبارت است از $D : x^2 + y^2 \leq 3$ و بنابراین

$$S : f = -x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0; (x, y) \in D,$$

و $\mathbf{F}$ رو به پایین است (یعنی، مؤلفه z آن منفی است).

$$C : x^2 + y^2 = 3, z = 2.$$

ابتدا منحنی C را پارامتره می‌کنیم:

چون $x^2 + y^2 = 3$ و جهت C عکس جهت مثلثاتی است (به شکل ۱۹.۲- (ب) توجه شود) فرض می‌کنیم $x = \sqrt{3} \sin t$ و $y = \sqrt{3} \cos t$. بنابراین

$$C : \mathbf{r}(t) = (\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, 2); 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, 2) \cdot (\sqrt{3} \cos t, -\sqrt{3} \sin t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t, 2, \sqrt{3} \cos t) \cdot (\sqrt{3} \cos t, -\sqrt{3} \sin t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \sin t \cos t + 3 \cos^2 t - 2 \sqrt{3} \sin t) dt \\ &= \left[3 \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \sin 2t + 2 \sqrt{3} \cos t \right]_0^{2\pi} = 3\pi.\end{aligned}$$

برای محاسبه این مقدار توسط قضیه استوکس، لازم است که $\mathbf{n}$ و $d\sigma$ را برای S و نیز کرل میدان برداری $\mathbf{F}$ را بیابیم:

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dx dy = \frac{(-2x, -2y, 2z)}{|2z|} dz dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \pm(-x, -y, z) \frac{dxdy}{z}, \\
 \text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+y & z & y \end{vmatrix} \\
 &= (1-1, 0-0, 0-1) = (0, 0, -1),
 \end{aligned}$$

که چون $\mathbf{n}$ رو به پایین است، باید مؤلفه z اش منفی باشد، پس در $\mathbf{n}$ (آمده در بالا) حالت - مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (0, 0, -1) \cdot (x, y, -z) \frac{dxdy}{z} \\
 &= \iint_D 1 dxdy = \text{Area}(D) = 3\pi.
 \end{aligned}$$

۸.۱۰. با استفاده از قضیه گرین انتگرال $I = \int_C (y^2 - x) dy + (x^2 + 2xy) dx$ را محاسبه کنید، که در آن، C منحنی حاصل از تلاقی $z = -x^2 - y^2 + 5$ با صفحه xOy است (و جهت انتگرال گیری در جهت مثلثاتی است).

پاسخ: منحنی C به صورت مقطع $z = 0$ با $z = -x^2 - y^2 + 5$ معرفی شده است. یعنی $z = 0$ ، $x^2 + y^2 = 5$: C . بنابراین داخل C عبارت است از $D : x^2 + y^2 \leq 5$ و بنا به قضیه گرین داریم

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C (x^2 + 2xy) dx + (y^2 - x) dy \\
 &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (y^2 - x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2xy) \right] dxdy \\
 &= - \iint_D (1 + 2x) dxdy \stackrel{(1)}{=} -5\text{Area}(D) = -5\pi.
 \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (1) چون تابع $2x$ بر ناحیه D نسبت به x فرد اسن و این ناحیه متقارن، پس انتگرال آن صفر شده است.

پاسخ مسایل امتحان یازدهم

۱.۱۱. در پیوستگی یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبدا مختصات بحث کنید^۱

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y^2)^2 + x^2}{(x+y^2)^2 - x^2} & (x+y^2)^2 \neq x^2 \\ 0 & (x+y^2)^2 = x^2 \end{cases}$$

پاسخ: مسیر $\mathbf{r}(t) = (0, t)$ در مبدا را امتحان می‌کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 + 0}{t^4 - 0} = 1.$$

پس حد f در $(0, 0)$ در صورت وجود برابر است با ۱، که چون این مقدار با $f(0, 0) = 0$ متفاوت است، نتیجه می‌گیریم که تابع در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۲.۱۱. اگر $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right) = 0$ آنگاه k را طوری بیابید که $kz = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

پاسخ: با فرض $u = x/y$ و $v = z/x$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{\partial F}{\partial u}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v}. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از فرمول مشتق ضمنی داریم

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} + y \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \\ &= \frac{-1}{\frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v}} \left\{ x \left(\frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + y \left(-\frac{x}{y^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\} \\ &= \frac{-1}{\frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v}} \left(-\frac{z}{x} \frac{\partial F}{\partial v} \right) = z. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه به ازای $k = 1$ برقرار است.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۱۱.۲. پاسخ مسایل امتحان یازدهم ۱۰۷ فصل ۲. پاسخ مسایل

۳.۱۱. مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xy^2$ را در نقطه $P_0(2, 0, 3)$ و در امتداد بردار یکه $\mathbf{u} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ بیابید.

پاسخ: چون $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-2/3)^2 + (-1/3)^2 + (2/3)^2} = 1$ بنابراین $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\| = \mathbf{u}$ بعلاوه

$$\nabla f(P_0) = (y + y^2, x + z^2 + 2xy, 2yz)|_{P_0} = (0, 11, 0),$$

و با در نظر گرفتن تعریف، داریم

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = 0 - \frac{11}{3} + 0 = -\frac{11}{3},$$

۴.۱۱. معادله خط مماس بر محل تقاطع سطح $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ با صفحه $x = 1$ را در نقطه $P_0(1, 2\sqrt{3}, -3)$ بیابید.

پاسخ: هر بردار مماس به فصل مشترک دو سطح، بر هر یک از این سطوح مماس است. بردار قائم هر یک از این سطوح عمود است پس کافی است بردار قائم بر صفحه $x = 1$ را در بردار قائم بر سطح $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ ضرب خارجی کنیم. یعنی،

$$\mathbf{n}_1 = \nabla f_1(P_0) = (1, 0, 0)|_{P_0} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{n}_2 = \nabla f_2(P_0) = (72x, -18y, 8z)|_{P_0} = (72, -36\sqrt{3}, -24),$$

$$V = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 72 & -36\sqrt{3} & -24 \end{vmatrix} = (0, 24, 36\sqrt{3}).$$

بنابراین، خط مورد نظر عبارت است از خط گذشته از نقطه P_0 با بردار هادی V ، یعنی

$$\ell : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2\sqrt{3}}{24} = \frac{z+3}{-36\sqrt{3}} : \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{12-2z}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

۵.۱۱. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^\pi \left[\int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy \right] dx$.

پاسخ: انتگرال نامعین تابع $\sin y/y$ معلوم نیست. بر همین اساس لازم است که ترتیب حدود آن را عوض کنیم. شاید با این کار مسأله قابل حل شود. (به شکل ۲۰.۲-الف) توجه شود در اینجا دامنه انتگرال عبارت است از

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\},$$

که پس از تعویض ترتیب حدود، عبارت است از

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq y\}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \left[\int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right] dy \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{\sin y}{y} x \right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^\pi \sin y dy = [-\cos y]_0^\pi = 2. \end{aligned}$$

۶.۱۱. اگر V ناحیه بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ باشد، آنگاه مطلوب است محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint_V \exp((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}) dV$.

پاسخ: از تغییر مختصات کروی استفاده می‌کنیم. چون ناحیه انتگرالگیری

$$V : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,$$

می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که تصویر کروی V عبارت است از $V' : 1 \leq \rho \leq 2$ و چون شرطی بر θ و φ وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم که

$$V' : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

بنابراین، چون دامنه مستطیل شکل و تابع مورد انتگرال ضربی است، پس

$$\begin{aligned} \iiint_V \exp((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}) dx dy dz &= \iiint_{V'} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_1^2 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho \right) \\ &= [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_0^\pi \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_1^2 = \frac{4\pi}{3} e(e^7 - 1). \end{aligned}$$

۷.۱۱. مساحت سطح جدا شده از مخروط $x^2 = y^2 + z^2$ به وسیله صفحات مختصات، $x = 1$ و $x = 2$ را بیابید.

پاسخ: سطح جدا شده را بر صفحه yOz تصویر می‌کنیم. چون بایستی $1 \leq x \leq 2$ پس این تصویر عبارت است از $D_{yz} : 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$. از طرفی سطح مورد نظر را به صورت $S : x = \sqrt{y^2 + z^2}$ می‌شود نوشت. بنابراین

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(2\cos t, 4\sin t, 0) \cdot (-2\sin t, 4\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (8\sin^2 t, 8\cos t \sin t, -4\cos^2 t) \cdot (-2\sin t, 4\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (16\sin^3 t + 32\cos^2 t \sin t) dt\end{aligned}$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 t - 1) \sin t \, dt = 16 [\cos t - \cos^3 t]_0^{2\pi} = 0.$$

برای محاسبه این مقدار توسط قضیه استوکس، لازم است کرل $\mathbf{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2/2 & xy & -x^2 \end{vmatrix} = (0, 2x, 0).$$

به علاوه چون معادله معرف سطح عبارت از $f = x^2/4 + y^2/16 + z^2 - 1$ است، داریم

$$\mathbf{n} \, d\sigma = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \, dxdy = \pm \frac{(x/2, y/8, 2z)}{|2z|} \, dxdy,$$

که با توجه به شکل ۲۰.۲- (ب) حالت مثبت مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_D (0, 2x, 0) \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{8}, 2z\right) \frac{dxdy}{2z} \\ &= \iint_D \frac{xy}{8z} \, dxdy = \frac{1}{8} \iint_D \frac{xy \, dxdy}{\sqrt{1 - x^2/4 - y^2/16}}. \end{aligned}$$

اما این انتگرال صفر است زیرا با تعویض x به $-x$ تابع تغییر علامت می‌دهد، ولی D تغییری نمی‌کند.

پاسخ مسایل امتحان دوازدهم

۱.۱۲. معادله صفحه‌ای را بنویسید که بر صفحه $x+y-2z=1$ عمود بوده و از محل تقاطع دو صفحه $x-z=1$ و $y+2z=3$ بگذرد.^۱

پاسخ: معادله دسته صفحاتی گذرنده از خط مشترک دو صفحه $x-z=1$ و $y+2z=3$ ، به صورت

$$P_a : a(y+2z-3) + (x-z-1) = 0,$$

است. پس صفحه P_a دارای بردار قائم $\mathbf{n}_a = (1, a, 2a-1)$ است. این صفحه وقتی و تنها وقتی بر صفحه مفروض $x+y-2z=1$ عمود است که بردار قائم آن بر بردار قائم این صفحه $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$ عمود باشد، یعنی $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n} = 0$. بنابراین $1+a-2(2a-1)=0$ ، یا $a=1$. پس صفحه مورد نظر ما P_1 است، یعنی $x+y+z=4$.

۲.۱۲. صفحه مماس بر بیضی‌گون $x^2+2y^2+z^2=1$ را طوری بیابید که موازی $x-y+2z=0$ باشد.

پاسخ: فرض کنیم $X_0 = (a, b, c)$ نقطه دلخواهی از بیضی‌گون مفروض $S : x^2+2y^2+z^2-1=0$ باشد. بنابراین $a^2+2b^2+c^2=1$. اما گردایان تابع معرف این بیضی‌گون در نقطه X_0 ، به بیضی‌گون عمود است. بنابراین بردار قائم بر صفحه مورد نظر ما نیز می‌باشد:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \nabla(x^2+2y^2+z^2-1)|_{X_0} \\ &= (2x, 4y, 2z)|_{X_0} = (2a, 4b, 2c). \end{aligned}$$

ولی، شرط موازی بودن دو صفحه این است که بردارهای قائم بر آن دو صفحه مفروض موازی باشند. بنابراین، چون بردار قائم بر صفحه P برابر $(1, -1, 2)$ است، نتیجه می‌گیریم که $2a/1 = 4b/(-1) = 2c/2$ ، یا $a = -2b$ و $c = -4b$. بنابراین، با قرار دادن این روابط در شرط $a^2+2b^2+c^2=1$ بدست می‌آوریم $4b^2+2b^2+16b^2=1$. پس $22b^2=1$ یا $b = \pm 1/\sqrt{22}$. یعنی دو حالت برای X_0 وجود دارد:

$$X_1 = \frac{\sqrt{22}}{22}(-2, 1, -8), \quad X_2 = \frac{\sqrt{22}}{22}(2, -1, 4).$$

صفحه گذشته از نقطه X_1 باید دارای بردار قائم $(-4/\sqrt{22}, 4/\sqrt{22}, -8/\sqrt{22})$ باشد، پس معادله صفحه مطلوب، در این حالت عبارت از $-x+y-2z = \frac{\sqrt{22}}{2}$ است. به صورت مشابه، صفحه گذشته از نقطه X_2 باید دارای بردار قائم $(4/\sqrt{22}, -4/\sqrt{22}, 8/\sqrt{22})$ باشد، پس معادله صفحه مطلوب، در این حالت عبارت از $x-y+2z = \sqrt{22}/2$ است.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۳.۱۲. در پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبدا مختصات بحث کنید:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

پاسخ: ثابت می‌کنیم که f در مبدا $O = (0, 0, 0)$ پیوسته است. برای این منظور باید ثابت کنیم

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall (x, y, z) \left(0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \implies \left| \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right| < \epsilon \right).$$

اگر فرض شود $u = \max\{|x|, |y|, |z|\}$ ، آنگاه از فرض $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta$ نتیجه می‌گردد که $|x| < \delta$ ، $|y| < \delta$ و $|z| < \delta$. بنابراین $u < \delta$. در این صورت

$$\left| \frac{xy^2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right| = \frac{|x|y^2|z|}{x^2 + y^2 + z^2} < \frac{uu^2u}{u^2 + 0^2 + 0^2} = u^2 < \delta^2.$$

پس کافی است فرض شود که $\delta = \sqrt{\epsilon}$. در عبارت بالا، بجای مخرج که $x^2 + y^2 + z^2$ است، عبارت $u^2 + 0^2 + 0^2$ را قرار داده‌ایم که همواره از قبلی کوچکتر است، زیرا در میان $|x|$ ، $|y|$ و $|z|$ لااقل یکی برابر با u است و سایرین کوچکتر و یا مساوی با u هستند.

۴.۱۲. تابع پتانسیل میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

را در صورت وجود بیابید و کار انجام شده توسط این نیرو را در طول خط $x = y = z$ از نقطه $(1, 1, 1)$ تا نقطه $(2, 2, 2)$ بیابید. بسادگی دیده می‌شود که میدان برداری داده شده دارای دامنه تعریف $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$ است و بر این دامنه دارای مشتق پیوسته است. بعلاوه

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-yx}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{-xz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{-yz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned}$$

پس $\mathbf{F}$ بر هر مجموعه بسته همبند ساده که $\mathbf{F}$ بر آن بطور پیوسته مشتق پذیر باشد، ابقایی است. یعنی، بر هر مجموعه بسته که شامل $(0,0,0)$ نباشد، ابقایی است. فرض کنیم $\omega = f(x,y,z)$ تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ باشد. بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \quad (2.3)$$

از (۲.۱) نسبت به x انتگرال جزئی گرفته، نتیجه می گیریم که

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + g(y,z). \quad (2.4)$$

که در اینجا g تابعی از y و z است. اکنون از (۲.۴) نسبت به y و x مشتق گرفته و نتیجه می گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad (2.6)$$

با مقایسه (۲.۲) و (۲.۵) نتیجه می گیریم $\partial g / \partial y = 0$ و همچنین با مقایسه (۲.۳) و (۲.۶) نتیجه می گیریم $\partial g / \partial z = 0$. بنابراین g تابعی ثابت است. در نتیجه، تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ برابر است با

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C,$$

که C عددی ثابت است. اما، نقاط داده شده $(1,1,1)$ و $(2,2,2)$ را در کره توپر به شعاع یک و با مرکز در $(3/2, 3/2, 3/2)$ ، که مجموعه ای بسته و فاقد $(0,0,0)$ است، می توان جای داد. پس از خاصیت ابقائی بودن $\mathbf{F}$ بر آن می توان استفاده کرد

$$\begin{aligned} \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(2,2,2) - f(1,1,1) \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

۵.۱۲. هرگاه $\mathbf{F} = \frac{y^2}{2}\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ و S سطح $x^2+y^2+z^2=4$ با فرض $z \geq 0$ باشد، آنگاه درستی قضیه استوکس را برای $\mathbf{F}$ و S تحقیق کنید.

پاسخ: از مفروضات $z \geq 0$ و $x^2+y^2+z^2=4$ نتیجه می گردد که

$$S : z = \sqrt{4-x^2-y^2}; (x,y) \in D,$$

که D تصویر S بر صفحه xOy است. یعنی، $D: x^2 + y^2 \leq 4$. بعلاوه معادله معرف S عبارت از $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ است. همچنین مرز S عبارت است از مقطع S با صفحه xOy :

$$C: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0: x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

اگر فرض کنیم جهت بردار قائم بر S به سمت بالا است (مولفه z آن مثبت است) پس باید بر C به جهت مثبت مثلثاتی حرکت کرد (به شکل ۲۱.۲-الف) توجه شود). بنابراین C را به شکل زیر پارامتره می‌کنیم:

$$C: \mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

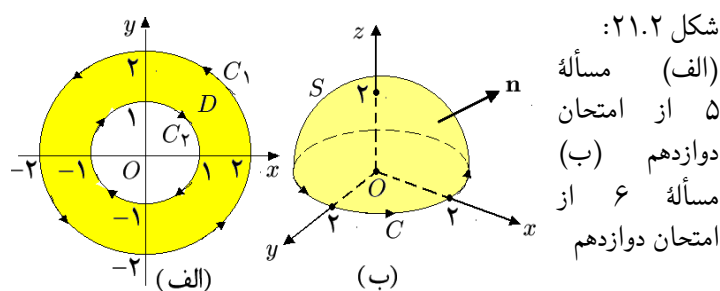
در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(2 \cos t, 2 \sin t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t, 4 \sin t \cos t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 t)(-\sin t) dt = 4 \left[-\cos^3 t + \cos t \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

اکنون برای تحقیق قضیه استوکس، لازم است $\text{Curl}(\mathbf{F})$ را محاسبه کنیم:

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2/2 & xy & -z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

بنابراین $\iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$ ، و قضیه در این حالت تحقیق شد.



۶.۱۲. درستی یا عدم درستی قضیه گرین را برای میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{k},$$

بر ناحیه D محصور بین دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ تحقیق کنید.

پاسخ: ناحیه D شامل مبدا نیست، و چون $\mathbf{F}$ بر دامنه‌اش به طور پیوسته مشتق پذیر است و $D = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ ، پس در این مورد از قضیه گرین می‌توان استفاده کرد (به شکل ۲۱.۲-ب) توجه شود).

ابتدا C_1 را پارامتره می‌کنیم. با توجه به اینکه $C_1: x^2 + y^2 = 4$ و جهت C_1 موافق جهت مثلثاتی است، نتیجه می‌گیریم

$$C_1: \mathbf{r} = (2\cos t, 2\sin t); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

همچنین، با توجه به اینکه $C_2: x^2 + y^2 = 1$ و جهت C_2 مخالف جهت مثلثاتی است، نتیجه می‌گیریم

$$C_2: \mathbf{r} = (\sin t, \cos t); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(2\cos t, 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\sin t}{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}, \frac{2\cos t}{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} \right) \cdot (-2\sin t, 2\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi, \\ \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\sin t, \cos t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\cos t}{\sin^2 t + 4\cos^2 t}, \frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \right) \cdot (\cos t, -\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر C مرز D باشد، با توجه به اینکه $C = C_1 + C_2$ ، داریم

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

اما، با استفاده از قضیه گرین، داریم

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D \left\{ \frac{(x^2 + y^2) - (2x)(x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) - (2y)(-y)}{(x^2 + y^2)^2} \right\} dx dy \\ &= \iint_D \left\{ \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

۷.۱۲. انتگرال دوگانه $\int_0^1 \left[\int_0^1 |x-y| dy \right] dx$ را حساب کنید.

پاسخ: دامنه انتگرال $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ است. اما تابع مورد انتگرال $|x-y|$ بر نیمی از آن برابر $x-y$ و بر نیمی دیگر برابر $y-x$ است. به بیان دقیقتر، اگر

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\},$$

آنگاه $|x-y|$ بر D_1 برابر با $x-y$ و بر D_2 برابر با $y-x$ است. (به شکل ۲۲.۲-الف) توجه شود). بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_D |x-y| dx dy &= \iint_{D_1} (x-y) dx dy + \iint_{D_2} (y-x) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^x (x-y) dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_x^1 (y-x) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{y^2}{2} + xy \right]_0^x dx + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy \right]_x^1 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

۸.۱۲. درستی قضیه دیورژانس را برای سطح $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ تحقیق کنید، که در آن a عددی حقیقی و مثبت است.

پاسخ: رویه $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$S_1: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; (x, y) \in D,$$

$$S_2: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; (x, y) \in D.$$

که در اینجا $D: x^2 + y^2 \leq a^2$. معادله معرف هر دو رویه

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

است. بنابراین چون $\nabla h = (2x, 2y, 2z)$ داریم

$$\mathbf{n}_1 d\sigma_1 = \pm \frac{\nabla h}{|h_z|} dx dy = \pm (x, y, z) \frac{dx dy}{|z|},$$

$$\mathbf{n}_2 d\sigma_2 = \pm \frac{\nabla h}{|h_z|} dx dy = \pm (x, y, z) \frac{dx dy}{|z|},$$

که چون (مطابق فرض معمول) باید بردارهای قائم بر یک سطح بسته روی به خارج داشته باشند، از شکل ۲۲.۲-ب) اینطور بر می‌آید که بایستی $\mathbf{n}_1$ رو به بالا $\mathbf{n}_2$ رو به پائین داشته باشد. بنابراین، با

توجه به اینکه z در S_1 مثبت و در S_2 منفی است، در هر دو حالت + مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}(x, y, z) \cdot (x, y, z) \frac{dxdy}{|z|} \\ &= \iint_D (x, y, z) \cdot (x, y, z) \frac{dxdy}{|z|} = \iint_D (x^2 + y^2 + z^2) \frac{dxdy}{|z|} \\ &= \iint_D \frac{a^2 dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a^2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= 2\pi a^2 \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=a} d\theta = 2\pi a^3.\end{aligned}$$

با محاسباتی که عین محاسبات بالا است، نشان داده می‌شود که $\iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ نیز برابر با $2\pi a^3$ است. بنابراین

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 4\pi a^3.$$

برای تحقیق قضیه دیورژانس، ابتدا $\text{div}(\mathbf{F})$ را محاسبه می‌کنیم

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

در نتیجه، اگر V داخل S باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dxdydz &= \iiint_V 3 dxdydz = 3\text{Vol}(V) \\ &= 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3.\end{aligned}$$

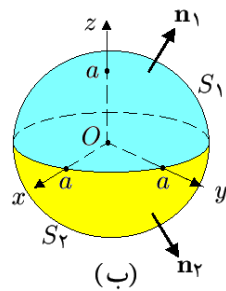
۹.۱۲. مختصات مرکز ثقل نیمکره همگن $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$ را با فرض $\delta = 1$ و $R > 0$ محاسبه کنید.

پاسخ: فرض کنیم مجموعه مود نظر V باشد. V نیم کره شمالی از یک کره به مرکز در مبدا و به شعاع R است. پس نمایش کروی آن عبارت است از

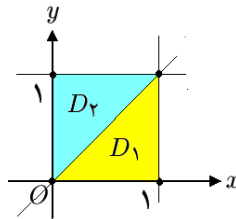
$$V : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

در این صورت، جرم V برابر است با

$$\iiint_V \delta dxdydz = \iiint_V dxdydz = \text{Vol}(V)$$



(ب)



(الف)

شکل ۲۲.۲:

(الف) مسأله

۷ از امتحان

(ب) دوازدهم

مسأله ۸ از

امتحان دوازدهم

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

چون با تعویض x با $-x$ ، چگالی δ و حجم V تغییر نمی‌کنند، بنابراین گشتاور V حول صفحه $x=0$ صفر است. در نتیجه مرکز ثقل V بر این صفحه واقع است، یعنی $x_C = 0$. به دلیل مشابه $y_C = 0$. پس برای مشخص شدن مرکز ثقل C ، کافی است z_C را محاسبه کنیم. نتیجه $C = (0, 0, 3R/8)$ است، زیرا

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{m} \iiint_V z dx dy dz = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint_{V'} \rho \cos \varphi \rho^2 d\rho d\varphi d\theta \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho \right] d\varphi \right] d\theta \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \frac{3}{8} R. \end{aligned}$$

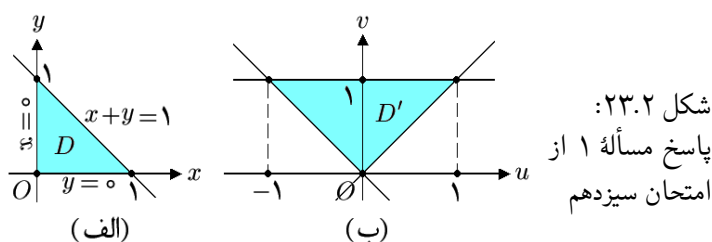
پاسخ مسایل امتحان سیزدهم

۱.۱۳. فرض کنید R ناحیه مثلثی شکل با رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0,1)$ باشد. انتگرال

$$\iint_R \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy,$$

را محاسبه کنید.^۱

پاسخ: ناحیه داده شده یک مثلث در صفحه Oxy است. به شکل ۲۳.۲- (الف) توجه شود. برای حل مسأله از تغییر متغیر خطی $u = y - x$ و $v = y + x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین، داریم



$$\begin{cases} x = (-u+v)/2 \\ y = (u+v)/2 \end{cases}, \quad J = \begin{vmatrix} -1/2 & +1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \left| \frac{-1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

چون تغییر متغیر خطی، خط را به خط تصویر می‌کند، برای یافتن تصویر ناحیه انتگرال گیری D در صفحه Ouv ، اضلاع مثلث سازنده لبه D را تصویر می‌کنیم:

xOy	$x = 0$	$y = 0$	$x + y = 1$
uOv	$v = u$	$v = -u$	$v = 1$

به شکل ۲۳.۲- (ب) توجه شود. به این ترتیب، داریم

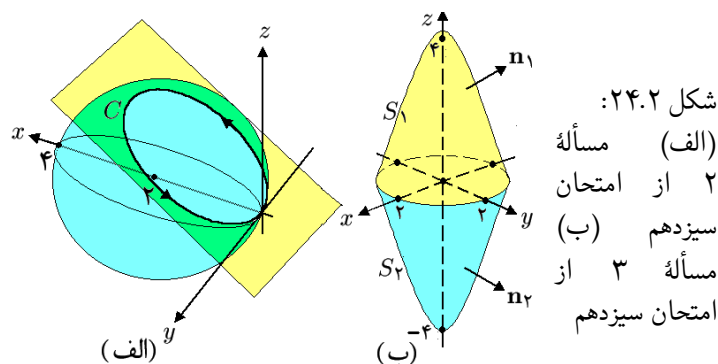
$$\begin{aligned} \iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dx dy &= \iint_{D'} e^{u/v} \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_{-v}^v e^{u/v} du \right] dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v (e - e^{-1}) dv = \frac{1}{2} \sinh 1. \end{aligned}$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۱۳۰۲. پاسخ مسایل امتحان سیزدهم ۱۲۰ فصل ۲. پاسخ مسایل

۲.۱۳. انتگرال $\int_C xy dx + yz dy + zx dz$ را محاسبه کنید. C آن قسمت از فصل مشترک $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ و $z = x$ در طرفی از صفحه xOz واقع است که $y > 0$.

پاسخ: منحنی داده شده C فصل مشترک یک کره و یک صفحه است. این منحنی دایره‌ای است که در شکل ۲۴.۲-الف) نشان داده شده است. برای پارامتره نمودن C ابتدا آن را بر صفحه Oxy تصویر می‌کنیم:



$$\begin{cases} z = x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow 2(x-1)^2 + y^2 = 2,$$

که یک بیضی می‌باشد. آن را به صورت مثلثاتی پارامتره می‌کنیم. برای این منظور کافی است فرض شود $x-1 = \cos t$ و $y = \sqrt{2} \sin t$. از طرفی $z = x$ ، بنابراین، در مجموع داریم

$$C : \vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1 + \cos t).$$

برای تعیین حدود تغییرات t توجه می‌کنیم که مطابق فرض باید $y \geq 0$ بنابراین $0 \leq \sin t$ یا $0 \leq t \leq \pi$. اکنون، انتگرال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{F}(1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1 + \cos t) \cdot (-\sin t, \sqrt{2} \cos t, -\sin t) dt \\ &= \int_0^\pi \sin t (1 + \cos t) (\cos t - 1 - \sqrt{2} \sin t) dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} t - \frac{\sqrt{2}}{3} \sin^3 t - \frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{3} + \cos t \right]_0^\pi \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi + \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

۳.۱۳. درستی قضیه دیورژانس (یا واگرایی) برای میدان برداری نیروی

$$\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k},$$

و سطح خارجی حجم محدود به $x^2 + y^2 - 4 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ را بررسی کنید.

پاسخ: این رویه، قسمتی از فضا است که از بالا به سهمیگون $z = 4 - x^2 - y^2$ و از پائین به سهمیگون $z = x^2 + y^2 - 4$ محدود می‌گردد. به شکل ۲۴.۲- (ب) توجه شود. این رویه از دو بخش تشکیل می‌گردد $S = S_1 + S_2$ ، که در آن

$$S_1 : z = 4 - x^2 - y^2 ; (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4,$$

$$S_2 : z = x^2 + y^2 - 4 ; (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4.$$

چنانچه فرض کنیم $f_1 = 4 - x^2 - y^2$ ، آنگاه بردار نرمال بر S_1 عبارت است از

$$\mathbf{n}_1 d\sigma_1 = \pm \frac{f'_1}{|(f_1)_z|} dx dy = \pm (2x, 2y, 1) dx dy,$$

که با توجه به فرض مسأله، حالت + مورد قبول است. چنانچه فرض کنیم $f_2 = x^2 + y^2 - 4$ ، آنگاه بردار نرمال بر S_2 عبارت است از

$$\mathbf{n}_2 d\sigma_2 = \pm \frac{f'_2}{|(f_2)_z|} dx dy = \pm (2x, 2y, -1) dx dy,$$

که با توجه به فرض مسأله، حالت + مورد قبول است. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D (x+y, y+4-x^2-y^2, x+4-x^2-y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &\quad + \iint_D (x+y, y+x^2+y^2-4, x+x^2+y^2-4) \cdot (2x, 2y, -1) dx dy \\ &= 2 \iint_D (x^2 + y^2 + 4) dx dy = 2 \iint_{D'} (r^2 + 4) r dr d\theta \\ &= 2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 (r^3 + 4r) dr = 4\pi(4 + 8) = 48\pi. \end{aligned}$$

اکنون مقدار خواسته شده را به کمک قضیه محاسبه می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که درون رویه بسته جهتدار S عبارت است از

$$V : 4 - x^2 - y^2 \leq z \leq x^2 + y^2 - 4.$$

۱۳.۲. پاسخ مسایل امتحان سیزدهم ۱۲۲ فصل ۲. پاسخ مسایل

با توجه به شکل ۲۴.۲- (ب)، تصویر V بر صفحه Oxy عبارت است از تصویر محل برخورد دو رویه S_1 و S_2 . لبه این قرص عبارت است از دایره $x^2 - y^2 = 4 - x^2 - y^2 = x^2 - y^2 = 4$ یا $x^2 + y^2 = 4$. بنابراین اگر فرض شود $x^2 + y^2 \leq 4$ ، D ، داریم

$$V : 4 - x^2 - y^2 \leq z \leq x^2 + y^2 - 4, (x, y) \in D,$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV &= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dV = 3 \iiint_{\Omega} dV \\ &= 3 \iint_D [z]_{z=x^2+y^2-4}^{z=4-x^2-y^2} dA = 6 \iint_D (4 - x^2 - y^2) dA \\ &\stackrel{(1)}{=} 6 \iint_{D'} (4 - r^2) dA' = 6 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^2 (4r - r^3) dr \right) \\ &= 6(2\pi) \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 12\pi(8 - 4) = 48\pi, \end{aligned}$$

که در (۱) از تغییر مختصات قطبی استفاده نموده‌ایم و D' تصویر D در صفحه $Or\theta$ است:

$$D' : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2.$$

۴.۱۳. مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I = \oint_C x^2 y^3 dx + dy + z dz,$$

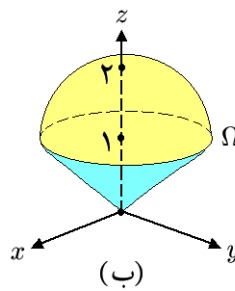
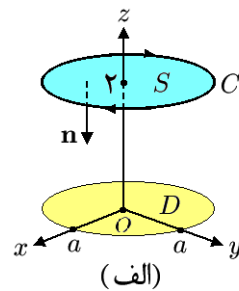
با استفاده از قضیه استوکس، که در آن C دایره حاصل از برخورد استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $z = 2$ است ($\mathbf{n}$ را در جهت z های منفی در نظر بگیرید).

پاسخ: منحنی C لبه قرص $S : z = 2; (x, y) \in D$ است که در آن $D : x^2 + y^2 \leq a^2$. به شکل ۲۵.۲- (الف) توجه شود. با توجه به جهت معرفی شده برای منحنی C ، داریم $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ بعلاوه، چون S موازی Oxy است داریم $d\sigma = dxdy$. برای استفاده از قضیه، به محاسبه پیچش میدان $\mathbf{F}$ نیاز داریم.

$$\operatorname{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = (0, 0, -3x^2 y^2).$$

به این ترتیب، به کمک قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{(S)} (0, 0, -3x^2 y^2) \cdot (-\mathbf{k}) dxdy = 3 \iint_D x^2 y^2 dxdy$$



شکل ۲۵.۲:
(الف) مسأله
۴ از امتحان
(ب) سیزدهم
مسأله ۵ از
امتحان سیزدهم

$$\begin{aligned}
 &= 3 \iint_{D'} r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta \\
 &= 3 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^5 dr \right) \\
 &= 3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4} d\theta \right) \left(\frac{a^6}{6} \right) = \frac{a^6}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{a^6}{8} \pi.
 \end{aligned}$$

۵.۱۳. گشتاور ماند (مان اینرسی) جسمی که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین به مخروط $3z^2 = x^2 + y^2$ محدود می‌باشد را نسبت به مبدأ بیابید، مشروط به اینکه تابع چگالی $\delta = \exp((x^2 + y^2 + z^2)^{5/2})$ باشد.

پاسخ: جسم صلب مورد نظر عبارت است از

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z^2, 0 \leq z.$$

تصویر این ناحیه در مختصات کروی عبارت است از

$$\begin{aligned}
 \Omega' : \rho^2 &\leq 4, \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 3\rho^2 \cos^2 \varphi, 0 \leq \rho \cos \varphi, \\
 : 0 &\leq \rho \leq 2, \tan^2 \varphi \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\
 : 0 &\leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

در نتیجه، گشتاور مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \delta dV \\
 &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dV = \iiint_{\Omega'} \rho^2 e^{\rho^5} \rho^2 \sin \varphi dV' \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^2 \rho^4 e^{\rho^5} d\rho \right)
 \end{aligned}$$

$$= (2\pi) \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{5} e^{5\varphi} \right]_0^2 = \frac{\pi}{5} (e^{32} - 1).$$

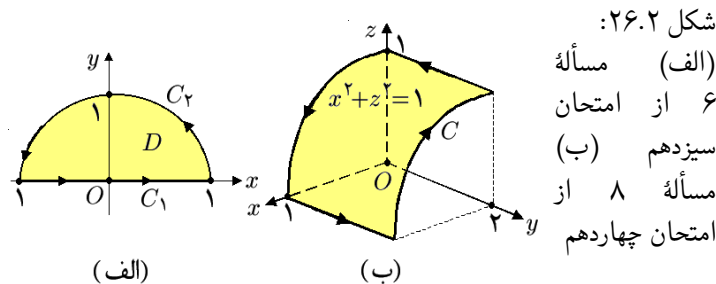
۶.۱۳. فقط به یکی از دو قسمت زیر پاسخ دهید:

الف) فرض کنید C شامل قوس نیم دایره بالایی دایره واحد از صفحه xOy به همراه بازه $[-1; 1]$ از محور x باشد. در این صورت، درستی قضیه گرین را برای انتگرال $\oint_C \exp(x^2) dx + x dy$ تحقیق کنید.

ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ذیل را تعیین کرده و آنرا قطری کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -15 \\ -3 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

پاسخ: الف) منحنی C مورد نظر از دو تکه تشکیل می‌شود $C = C_1 + C_2$ (به شکل ۲۶.۲-الف) توجه شود، که در آن



$$C_1 = (-1, 0)(1, 0),$$

$$: \mathbf{r}(t) = (1-t)(-1, 0) + t(1, 0) ; 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq y,$$

$$: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) ; 0 \leq t \leq \pi.$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 \left(e^{(2t-1)^2}, 2t-1 \right) \cdot (2, 0) dt + \int_0^\pi \left(e^{\cos^2 t}, \cos t \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 e^{(2t-1)^2} dt + \int_0^\pi (-\sin t e^{\cos^2 t} + \cos^2 t) dt$$

$$\stackrel{(1)}{=} 2 \int_{-1}^1 e^{v^2} \frac{1}{2} dv + \int_1^{-1} e^{u^2} du + \int_0^\pi \frac{1 + \cos^2 t}{2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

توضیح اینکه در (۱) فرض کرده‌ایم $u = \cos t$ و $v = 2t - 1$. بنابراین

$$du = -\sin t dt, \quad dv = 2 dt, \quad \begin{array}{c|cc} t & 0 & -1 \\ \hline v & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} t & 0 & \pi \\ \hline v & -1 & 1 \end{array}$$

اکنون با توجه به اینکه درون منحنی C نیم قرص $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y$ است، به کمک قضیه گرین داریم:

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \iint_D (1 - 0) dA = \iint_D dA$$

$$= \text{Area}(D) = \frac{1}{2} \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

(ب) ابتدا به کمک قضیه هامیلتون و تشکیل معادله مشخصه A ، مقادیر ویژه آن را بدست می‌آوریم:

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 8\lambda + 64 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2, 4, 8.$$

اکنون بردارهای ویژه نظیر به هر یک از این مقادیر ویژه را بدست می‌آوریم:

$$\lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} 13x - 15z = -2x, \\ -3x + 4y + 9z = -2y, \\ 5x - 7z = -2z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ z = x, \end{cases} \xrightarrow{x=1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{v}_1,$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = z = 0, \\ y = y, \end{cases} \xrightarrow{y=1} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{w}_2,$$

$$\lambda = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 3z, \\ y = 0, \end{cases} \xrightarrow{z=1} \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_3 = \frac{\sqrt{10}}{10} \mathbf{v}_3.$$

توضیح اینکه $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$ بردار یکه $\mathbf{v}_i$ است. در نتیجه، ماتریس قطری ساز عبارت است از:

$$C = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 3\sqrt{10}/10 \\ -\sqrt{3}/3 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix},$$

۱۳۰۲. پاسخ مسایل امتحان سیزدهم ۱۲۶ فصل ۲. پاسخ مسایل

و به این ترتیب، داریم

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

پاسخ مسایل امتحان چهاردهم

۱.۱۴. با استفاده از مسیر $\mathbf{r}_a(t) = (t, at)$ منتهی به $X_0 = (0, 0)$ داریم

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}_a(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 a^2}{t^3 + a^3 t^3} = \frac{a^2}{1 + a^3},$$

که به a بستگی دارد. بنابراین، حد مورد نظر وجود ندارد.^۱

۲.۱۴. فرض کنید $u = f\left(x + \frac{y}{z}, y + \frac{x}{t}\right)$ رابطه‌ای بدون حضور f بین u و مشتقاتش بیابید.

پاسخ: نشان دهید حد تابع زیر در $(0, 0)$ وجود ندارد:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{|x|^3 + 2|y|^3} & \text{اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا از u نسبت به x و y مشتق گرفته و سپس f_1 و f_2 (یعنی، مشتقات جزئی f نسبت به اولین و دومین متغیرش) را بر حسب u_x و u_y محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} u_x = 1f_1 + f_2/z \\ u_y = f_1/z + f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/z \\ 1/z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

در نتیجه، بنابه قاعده کرامر داریم

$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & 1/z \\ f_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/z \\ 1/z & 1 \end{vmatrix}} = z \frac{zu_x - u_y}{z^2 - 1}, \quad f_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_1 \\ 1/z & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/z \\ 1/z & 1 \end{vmatrix}} = z \frac{zu_y - u_x}{z^2 - 1}.$$

از طرفی $u_z = (-y/z^2)f_1 - (x/z^2)f_2$ ، بنابراین، با توجه به مقادیر f_1 و f_2 در بالا، داریم

$$u_z = \frac{-y}{z^2} \left(z \frac{zu_x - u_y}{z^2 - 1} \right) - \frac{x}{z^2} \left(z \frac{zu_y - u_x}{z^2 - 1} \right).$$

به عبارت دیگر

$$(x - yz)u_x + (y - xz)u_y = z(z^2 - 1)u_z,$$

که در آن f حضور ندارد.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۳.۱۴. فرض کنید C یک فنر به ضابطه

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t); \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

است. کنج فرنه، انحنا و تاب آنرا در نقطه $X_0 = (-4, 0, 3\pi)$ بیابید.

پاسخ: ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-4 \sin t, 4 \cos t, 3), \\ \mathbf{r}''(t) &= (-4 \cos t, -4 \sin t, 0), \\ \mathbf{r}'''(t) &= (4 \sin t, -4 \cos t, 0), \end{aligned} \quad \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 \sin t & 4 \cos t & 3 \\ -4 \cos t & -4 \sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (12 \sin t, -12 \cos t, 16).$$

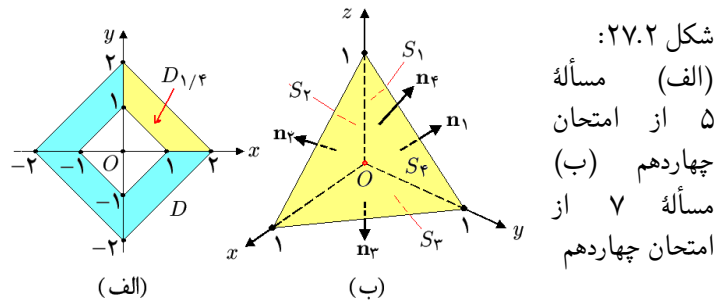
از طرفی $X_0 = \mathbf{r}(\pi)$ و بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\pi) &= \frac{\mathbf{r}'(\pi)}{\|\mathbf{r}'(\pi)\|} = \frac{1}{5}(4, 0, 3), \\ \mathbf{B}(\pi) &= \frac{\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)}{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|} = \frac{1}{5}(0, 3, 4), \\ \kappa(\pi) &= \frac{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|}{\|\mathbf{r}'(\pi)\|^3} = \frac{20}{(5)^3} = \frac{4}{25}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathbf{N}(\pi) &= \mathbf{B}(\pi) \times \mathbf{T}(\pi) \\ &= \frac{1}{25} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{25}(9, 16, -12), \\ \tau(\pi) &= \frac{(\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)) \cdot \mathbf{r}'''(\pi)}{\|\mathbf{r}'(\pi) \times \mathbf{r}''(\pi)\|^2} \\ &= \frac{48}{(20)^2} = \frac{3}{25}. \end{aligned}$$

۴.۱۴. فرض کنید C همچون مسأله ۳ باشد و نقطه $(x, y, z) \in C$ دارای چگالی جرمی $z \sqrt{x^2 + y^2}$ است. جرم C را محاسبه کنید.

پاسخ: کافی است از چگالی δ بر منحنی C انتگرال بگیریم:

$$\begin{aligned} m &= \int_C \delta \, ds \\ &= \int_0^{4\pi} 3t \sqrt{(4 \cos t)^2 + (4 \sin t)^2} \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2 + (3)^2} \, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (3t)(4)(5) \, dt = 60 \int_0^{4\pi} t \, dt = 60 \frac{(4\pi)^2}{2} = 480\pi^2 \end{aligned}$$



شکل ۲۷.۲:

(الف) مسأله

۵ از امتحان

چهاردهم (ب)

مسأله ۷ از

امتحان چهاردهم

۵.۱۴. متوسط تابع $f = |x| + |y|$ بر حلقه لوزی $1 \leq |x| + |y| \leq 4$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ناحیه مورد نظر یک حلقه لوزی شکل محدود بین دو لوزی به معادلات $|x| + |y| = 2$ و $|x| + |y| = 1$ است. به شکل ۲۷.۲- (الف) توجه شود. به دلیل تقارنی که شکل و نیز تابع f نسبت به مبدا دارند، کافی است محاسبات را تنها بر قسمتی از D که در ربع اول قرار دارد محاسبه کنیم. یعنی، بر مجموعه

$$D_{1/4} : 1 \leq x + y \leq 2, 0 \leq x, 0 \leq y.$$

این مجموعه را به صورت $D_2 - D_1$ می‌نویسیم که در آن

$$D_1 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x,$$

$$D_2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x.$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= 4\text{Area}(D_{1/4}) = 4\text{Area}(D_2) - 4\text{Area}(D_1) \\ &= 4 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 6 \\ \text{mean}_D f &= \frac{1}{\text{Area}(D)} \iint_D f \, dA = \frac{1}{6} \iint_D (|x| + |y|) \, dA \\ &= \frac{1}{6} \times 4 \times \iint_{D_{1/4}} (x + y) \, dA = \frac{2}{3} \times 2 \times \iint_{D_{1/4}} y \, dA \\ &= \frac{4}{3} \iint_{D_2} y \, dA - \frac{4}{3} \iint_{D_1} y \, dA \\ &= \frac{4}{3} \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} y \, dy \right] dx - \frac{4}{3} \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} y \, dy \right] dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{2} dx - \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{16}{9} - \frac{2}{9} = \frac{14}{9}. \end{aligned}$$

۱۴۰۲. پاسخ مسایل امتحان چهاردهم ۱۳۰ فصل ۲. پاسخ مسایل

۶.۱۴. اگر نقطه به مختصات (x, y, z) از کره توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ دارای چگالی جرمی $2z/(x^2 + y^2)$ باشد، گشتاور ماند این جسم حول محور z ها را محاسبه کنید.

پاسخ: در این مسأله ناحیه انتگرالگیری $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ است. این ناحیه را به مختصات کروی می‌بریم.

$$\Omega' : \rho^2 \leq 4\rho \cos \varphi, 0 \leq \cos \varphi$$

$$: 0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

به این ترتیب، گشتاور خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \delta dV = \iiint_{\Omega} 2z dV = 2 \iiint_{\Omega'} \rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi dV' \\ &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} dV \right) \left(\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{4 \cos \varphi} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi d\rho \right] d\varphi \right) \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{(4 \cos \varphi)^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= 2^6 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi = 2^6 \pi \left[-\frac{\cos^6 \varphi}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{3} \pi. \end{aligned}$$

۷.۱۴. فرض کنید Ω هرم محدود به صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ است و S سطح خارجی آن می‌باشد. فضاچه گاوس را برای رویه S و میدان برداری $\mathbf{F} = (3z, y, 2x)$ تحقیق کنید.

پاسخ: ابتدا به روش مستقیم محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، رویه مورد نظر را S که یک هرم است، به چهار مثلث افراز می‌کنیم $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ، که در آن

$$\begin{aligned} S_1 : x &= 0, & D_1 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y, \\ S_2 : y &= 0, & D_2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x, \\ S_3 : z &= 0, & D_3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, \\ S_4 : x + y + z &= 0, & D_4 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x. \end{aligned}$$

اگر $\mathbf{n}_i$ بردار نرمال رویه S_i و $d\sigma_i$ المان مساحت آن باشد، آنگاه با توجه به شکل ۲۷.۲- (ب) داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= -\mathbf{i}, & \mathbf{n}_2 &= -\mathbf{j}, & \mathbf{n}_3 &= -\mathbf{k}, & \mathbf{n}_4 &= \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1), \\ d\sigma_1 &= dydz, & d\sigma_2 &= dx dz, & d\sigma_3 &= dx dy, & d\sigma_4 &= \sqrt{3} dx dy. \end{aligned}$$

پس، در مجموع داریم

$$\oiint (S) \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{(S_1)} + \dots + \iint_{(S_4)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_1} (3z, y, 0) \cdot (-1, 0, 0) dydz + \iint_{D_2} (3z, 0, 2x) \cdot (0, -1, 0) dx dz \\
 &\quad + \iint_{D_3} (0, y, 2x) \cdot (0, 0, -1) dx dy + \iint_{D_4} (3-3x-3y, y, 2x) \cdot (1, 1, 1) dx dy \\
 &= \iint_{D_1} -3z dydz + 0 + \iint_{D_3} -2x dx dy + \iint_{D_4} (3-x-2y) dx dy \\
 &= \iint_{D_1} (3-8x) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (3-8x) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 [3(1-x) - 8x(1-x)] dx = \left[8\frac{x^3}{3} - \frac{11}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

از طرفی به کمک قضیه گاوس، داریم

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV &= \iiint_{\Omega} (0+1+0) dV \\
 &= \frac{1}{6} \operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

۸.۱۴. انتگرال $\mathbf{F} = (z, x, x)$ را بر مسیر در شکل ۲۶.۲- (ب) محاسبه کنید.

پاسخ: از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. رویه‌ای S که لبه آن منحنی C است، عبارت است از قسمتی از استوانه $x^2 + z^2 = 1$ که در یک هشتم اول قرار داشته و نیز در نیم فضای $y \leq 2$ قرار دارد. بنابراین $S : z = \sqrt{1-x^2}, (x, y) \in D$ که در آن $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$. از طرفی

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & x & x \end{vmatrix} \\
 &= (0-0, 1-0, 0-0) = (0, 1, 0) \\
 d\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 + (0)^2} dx dy = \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \mathbf{n} &= \pm \frac{(2x, 0, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 0 + 4z^2}} = \pm (x, 0, \sqrt{1-x^2}),
 \end{aligned}$$

که با توجه به شکل ۲۶.۲- (ب) حالت + مورد قبول است. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\
 &= \iint_D (0, 1, 0) \cdot (x, 0, \sqrt{1-x^2}) \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}} = 0.
 \end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان پانزدهم

۱.۱۵. در پیوستگی تابع زیر بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید: ^۱

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + (x+y)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ: روشن است که f در $X_0 \neq (0, 0)$ پیوسته است. در $X_0 = (0, 0)$ نیز

$$|f(x, y) - 0| = \frac{|x|^3}{x^2 + (x+y)^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2 + 0} = |x| < \delta = \varepsilon.$$

پس f بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

۲.۱۵. نشان دهید که اگر $f(x - yz, y - xz) = 0$ و f تابعی دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه

$$z = \frac{1 - xz_y - yz_x}{1 + xz_x + yz_y}.$$

پاسخ: از طرفین رابطه داده شده نسبت به x و y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (1 - yz_x) f_u - (z + xz_x) f_v &= 0, \\ -(z + yz_y) f_u + (1 - xz_y) f_v &= 0. \end{aligned}$$

پس به شکل ماتریسی داریم:

$$\begin{pmatrix} 1 - yz_x & -z - xz_x \\ -z - yz_y & 1 - xz_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

که شرط غیر ثابت بودن f به معنی صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب آن است. بنابراین

$$(1 - yz_x)(1 - xz_y) = (z + yz_y)(z + xz_x),$$

که همان معادله خواسته شده است.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۳.۱۵. ثابت کنید که منحنی زیر بر یک کره واقع است:

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t) ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

پاسخ: یک راه این است که نشان دهیم مرکز کره بوسان آن ثابت است. راه دوم این است که نشان دهیم، مختصات آن در معادله یک کره صدق می‌کند: چون $x = \cos^2 t$ ، $y = \cos t \sin t$ و $z = \sin t$ بنابراین

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin^2 t = 1.$$

یعنی، منحنی C بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ قرار دارد.

۴.۱۵. با تعویض ترتیب حدود، انتگرال بگیرید

$$\int_0^{12} \left[\int_{-\sqrt{y/3}}^{\sqrt{y/3}} e^{x^3-12x} dx \right] dy$$

پاسخ: در اینجا

$$D : 0 \leq y \leq 12, -\sqrt{y/3} \leq x \leq \sqrt{y/3},$$

که ناحیه محدود به سهمی $y = 3x^2$ و خط $y = 12$ است. به شکل ۲۸.۲-الف) توجه شود. با برخورد دادن این دو منحنی، بدست می‌آوریم $3x^2 = 12$ یا $x = \pm 2$. لذا، D به عنوان x -منظم عبارت است از $D : -2 \leq x \leq 2, 12 \leq y \leq 3x^2$. بنابراین، انتگرال مورد نظر برابر است با

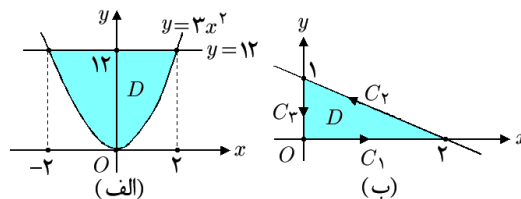
شکل ۲۸.۲:

الف) مسأله ۴

از امتحان پانزدهم

ب) مسأله ۵ از

امتحان پانزدهم



$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \left[\int_{3x^2}^{12} e^{x^3-12x} dy \right] dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[y e^{x^3-12x} \right]_{3x^2}^{12} dx = \int_{-2}^2 (12 - 3x^2) e^{x^3-12x} dx \\ &= \left[-e^{x^3-12x} \right]_{-2}^2 = 2 \sinh 16. \end{aligned}$$

۵.۱۵. قضیه گرین را برای مرز ناحیه $D : 0 \leq x, 0 \leq y, x + 2y \leq 2$ و میدان برداری $\mathbf{F} = (y^2, x^2)$ تحقیق کنید.

پاسخ: الف) به کمک قضیه. برای این منظور توجه می‌کنیم که درون منحنی C عبارت از $0 \leq D$ است (به شکل ۲۸.۲- (ب) توجه شود) و بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_D (Q_x - P_y) dx dy &= \iint_D (2x - 2y) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{1-x/2} 2(x-y) dy \right] dx = \int_0^2 [2xy - y^2]_0^{1-x/2} dx \\ &= \int_0^2 \left(2x - x^2 - 1 + x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[-\frac{5x^3}{12} + \frac{3x^2}{2} - x \right]_0^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ب) مستقیم. در این حالت C اجتماع سه تکه پاره خط می‌باشد: $C = C_1 + C_2 + C_3$ که در آن

$$\begin{aligned} C_1 : \mathbf{r}(t) &= (1-t)(0,0) + t(2,0) \\ &= (2t,0), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ C_2 : \mathbf{r}(t) &= (1-t)(2,0) + t(0,1) \\ &= (2-2t,t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ C_3 : \mathbf{r}(t) &= (1-t)(0,1) + t(0,0) \\ &= (0,1-t), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(2t,0) \cdot (2,0) dt + \int_0^1 \mathbf{F}(2-2t,t) \cdot (-2,1) dt \\ &\quad + \int_0^1 \mathbf{F}(0,1-t) \cdot (0,-1) dt \\ &= \int_0^1 (0,4t^2) \cdot (2,0) dt + \int_0^1 (t^2, 4-8t+4t^2) \cdot (-2,1) dt \\ &\quad + \int_0^1 (1-2t+t^2,0) \cdot (0,-1) dt \\ &= \int_0^1 (-2t^2 + 4 - 8t + 4t^2) dt = \left[2\frac{t^3}{3} - 4t^2 + 4t \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

۶.۱۵. اگر $\Omega : |x| + |y| + |z| \leq 1$ و چگالی نقطه به مختصات (x,y,z) از Ω برابر $|z|$ باشد جرم Ω را محاسبه کنید.

پاسخ: به دلیل تقارن کافی است انتگرال $|z|$ را بر یک هشتم Ω که در یک هشتم اول است محاسبه

کنیم و سپس حاصل را در هشت ضرب کنیم:

$$\Omega_{1/8} : 0 \leq x, 0 \leq z, x+y+z \leq 1$$

$$: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\Omega} |z| dV = 8 \iiint_{\Omega_{1/8}} z dV \\ &= 8 \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} z dz \right] dy \right] dx \\ &= 8 \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{1-x-y^2}{2} dy \right] dx \\ &= 8 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

۷.۱۵. فرض کنید Ω ناحیه محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $z = 4$ واقع در یک هشتم اول است و S سطح خارجی آن و $\mathbf{n}$ بردار برونسوی S می‌باشد. انتگرال میدان برداری زیر را بر S محاسبه کنید:

$$\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + (4x^2y^3)\mathbf{k}.$$

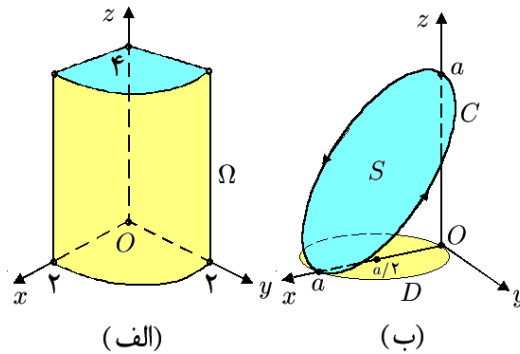
پاسخ: حجم مورد نظر یک چهارم از یک استوانه توپر قائم به شکل ۲۹۰۲- (الف) است:

$$\Omega : 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4.$$

این حجم سطح خارجی یک رویه بسته جهتدار با جهت استاندارد است. بنابراین از قضیه دیورژانس می‌توان استفاده نمود. لازم است ناحیه Ω را به مختصات استوانه‌ای ببریم:

$$\begin{aligned} \Omega' : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 4, \\ \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = \iiint_{\Omega} (12x + 2y + 2) dV \\ = 2 \iiint_{\Omega'} (6r \cos \theta + r \sin \theta + 1) r dV' \\ = 2 \left(\int_0^4 dz \right) \int_0^2 \left[\int_0^{\pi/2} (6r \cos \theta + r \sin \theta + 1) d\theta \right] dr \\ = 8 \int_0^2 [6r^2 \sin \theta - r^2 \cos \theta + \theta]_0^{\pi/2} dr \end{aligned}$$

$$= 8 \int_0^2 \left(7r^2 + \frac{\pi}{2} \right) dr = \frac{8}{3} (56 + 3\pi).$$



شکل ۲۹.۲:

(الف) مسأله ۷

از امتحان پانزدهم

(ب) مسأله ۸ از

امتحان پانزدهم

۸.۱۵. مطلوبست انتگرال $\mathbf{F}$ بر C ، در صورتی که

$$C : \mathbf{r}(t) = (a \sin^2 t, a \sin^2 t, a \cos^2 t); 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\mathbf{F} = (y+z, z+x, x+y) \text{ و}$$

پاسخ: از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید رویه‌ای S را بیابیم که C لبه آن بوده و جهت S با C سازگار باشد. توجه می‌کنیم که

$$C : \begin{cases} a((1 - \cos 2t)/2) = x, \\ a \sin 2t = y, \\ a((1 + \cos 2t)/2) = z, \end{cases} : \begin{cases} \cos 2t = (a - 2x)/a, \\ \sin 2t = y/a, \\ \cos 2t = 2z/a - 1. \end{cases}$$

بنابراین C مقطع دو استوانه $(2x-a)^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $x+z=a$ است:

$$C : (2x-a)^2 + y^2 = a^2, \quad z+x=a.$$

به شکل ۲۹.۲- (ب) توجه شود. بنابراین، می‌شود فرض کرد S قسمتی از صفحه $x+z=a$ است که توسط استوانه $(2x-a)^2 + y^2 = a^2$ بریده شده است و جهت بردار قائم بر آن $\mathbf{n}$ رو به بالا است. به بیان دیگر، اگر $f = x+y$ تابع معرف S باشد، آنگاه

$$S : x+z=a; (x,y) \in D,$$

$$D : (2x-a)^2 + y^2 \leq a^2$$

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} = \pm \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}},$$

$$d\sigma = \frac{\|\mathbf{f}'\|}{|f_z|} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

البته بنابه مفروضات مسأله حالت $+$ در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. همچنین، ملاحظه می‌گردد که

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & z & x \end{vmatrix} = (-1, 0, -1).$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D (-1, 0, -1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{2} dx dy \\ &= \iint_D -2 dx dy = -2 \text{Area}(D) = -2 \times \pi \times a^2 = -2\pi a^2.\end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان شانزدهم

۱.۱۶. فاصله دو خط $\ell_1 : x+2y=3, y+2z=3$ و $\ell_2 : x+y+z=6, x-2z=-5$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا دو خط داده شده را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \ell_1 : \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2z=-5 \end{cases} & : \begin{cases} z=(x+5)/2 \\ z=(11-y)/3 \end{cases} \\ & : \frac{x+5}{2} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z-0}{1} \\ \ell_2 : \begin{cases} x+2y=3 \\ y+2z=3 \end{cases} & : \begin{cases} y=(3-x)/2 \\ y=3-2z \end{cases} \\ & : \frac{x-3}{4} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-3/2}{1}. \end{aligned}$$

در نتیجه اگر $\mathbf{v}_i$ بردار هادی ℓ_i و X_i یک تکیه‌گاه برای ℓ_i باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (2, -3, 1), & X_1 &= (3, 0, 3/2), \\ \mathbf{v}_2 &= (4, -2, 1), & X_2 &= (-5, 11, 0). \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $d(\ell_1, \ell_2)$ فاصله ℓ_1 تا ℓ_2 باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1, 2, 8), \\ X_2 - X_1 &= \left(8, -11, \frac{3}{2} \right), \\ d(\ell_1, \ell_2) &= \frac{|(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (X_2 - X_1)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|} \\ &= \frac{|-8 - 22 + 12|}{\sqrt{1+4+64}} \\ &= \frac{18}{\sqrt{69}}. \end{aligned}$$

۲.۱۶. تنها به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید:

الف) با فرض اینکه $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ ، معادله دایره بوسان (خمیدگی) منحنی C را در $t = 1$ بدست آورید.

ب) کنج فرنه منحنی $\mathbf{r}(t) = (t-1, t^2, t^3 - t^2)$ را در نقطه $t = 1$ بس بیابید.

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

پاسخ: الف) با توجه به اینکه $x(t) = 2t$ و $y(t) = t^2 - 1$ داریم

$$\begin{aligned} \kappa(1) &= \frac{x''(1)y'(1) - y''(1)x'(1)}{(x'(1)^2 + y'(1)^2)^{3/2}} = \frac{(0)(1) - (2)(2)}{(2^2 + 1^2)^{3/2}} = \frac{-4}{5\sqrt{5}}, \\ R(1) &= \frac{1}{|\kappa(1)|} = \frac{5\sqrt{5}}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مرکز خمیدگی} \quad \mathbf{r}(1) + R(1)\mathbf{N}(1) &= (2, 0) + \frac{5\sqrt{5}}{4} \frac{\mathbf{r}'(1)^\perp}{\|\mathbf{r}'(1)\|} \\ &= (2, 0) + \frac{5\sqrt{5}}{4} \frac{(2, 2)}{2} \\ &= \left(2 + \frac{5\sqrt{5}}{4}, \frac{5\sqrt{5}}{4}\right). \end{aligned}$$

ب) ابتدا مشتقات اول و دوم $\mathbf{r}(t)$ را در $t = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(1) &= (1, 2t - 1, 3t^2 - 2t) \Big|_{t=1} = (1, 1, 1), \\ \mathbf{r}''(1) &= (0, 2, 6t - 2) \Big|_{t=1} = (0, 2, 4). \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (2, -4, 2).$$

داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(1) &= \frac{\mathbf{r}'(1)}{\|\mathbf{r}'(1)\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ \mathbf{B}(1) &= \frac{\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)}{\|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)\|} = \frac{(2, -4, 2)}{\sqrt{4 + 16 + 4}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \\ \mathbf{N}(1) &= \mathbf{B}(1) \times \mathbf{T}(1) = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{6} (3, 0, -3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

۳.۱۶. در پیوستگی تابع $f(x, y)$ بر $\mathbb{R}$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} & \text{اگر } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پاسخ: اگر $X_0 = (x_0, y_0)$ داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ باشد، ضابطه تابع در همسایگی X_0 به

۱۶.۲. پاسخ مسایل امتحان شانزدهم ۱۴۰ فصل ۲. پاسخ مسایل

صورت $\sqrt{4-x^2-y^2}$ است که تابعی پیوسته است. اگر X_0 خارج C باشد، ضابطه تابع صفر است، که باز هم پیوسته است. اما اگر X_0 بر C قرار داشته باشد، یعنی $x_0^2 + y_0^2 = 4$ ، آنگاه با فرض $\theta_0 = \arctan(y_0/x_0)$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(r,\theta) \rightarrow (2,\theta_0)} f(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (2,\theta_0)} \sqrt{4-r^2} = \lim_{r \rightarrow 2} \sqrt{4-r^2} = 0 = f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

بنابراین f در این حالت نیز پیوسته است. در نتیجه، f بر کل $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

۴.۱۶. فرض کنید $u = f(x, y)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد طوری که n ای وجود داشته باشد که بازاً هر t و x و y داشته باشیم $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. در این صورت نشان دهید:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f.$$

پاسخ: بنا به فرض، به ازای هر $t > 0$ و هر (x, y) ای $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ از طرفین این رابطه نسبت به t دو بار مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty) &= n t^{n-1} f(x, y), \\ x^2 f_{xx}(tx, ty) + 2xy f_{xy}(tx, ty) + y^2 f_{yy}(tx, ty) &= n(n-1) t^{n-2} f(x, y). \end{aligned}$$

اکنون کافی است فرض شود $t = 1$ و برهان تمام است.

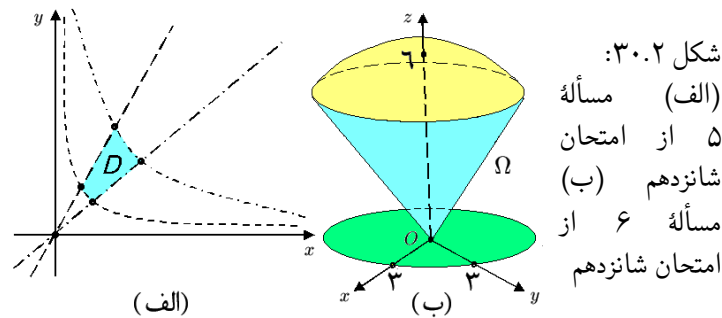
۵.۱۶. فرض کنید D ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy = 1$ و $xy = 9$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$ واقع در ربع اول باشد و $f = \sqrt{y/x} + \sqrt{xy}$. انتگرال f بر D را محاسبه کنید.

پاسخ: با توجه به صورت مسأله و شکل ۳۰.۲-الف، ناحیه D را به صورت

$$\begin{aligned} D : 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq xy \leq 9, x \leq y \leq 4x, \\ : 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq xy \leq 9, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4, \end{aligned}$$

می‌توان نوشت. فرض کنیم $u = xy$ و $v = y/x$. در این صورت، تصویر D در صفحه uv عبارت از $D' : 1 \leq u \leq 9, 1 \leq v \leq 4$ است. بعلاوه

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1 \div \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| \\ &= 1 \div \left\| \begin{pmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{pmatrix} \right\| = 1 \div \left| \frac{2y}{x} \right| = \frac{1}{2|v|} = \frac{1}{2v}. \end{aligned}$$



بنابراین، انتگرال مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned}\iint_D f dA &= \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy = \iint_{D'} (\sqrt{v} + \sqrt{u}) \frac{1}{2v} du dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_1^9 du \right) \left(\int_1^4 v^{-1/2} dv \right) + \frac{1}{2} \left(\int_1^9 u^{1/2} du \right) \left(\int_1^4 v^{-1} dv \right) \\ &= \frac{1}{2} (9)(2) - \frac{1}{2} \left(\frac{56}{3} \right) (\ln 4) = 9 - \frac{56}{3} \ln 2.\end{aligned}$$

۶.۱۶. فرض کنید Ω قسمتی از نیم فضای بالایی باشد که توسط مخروط $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ جدا شده است. اگر تابع چگالی حجمی Ω به صورت $\delta = \exp(x^2 + y^2 + z^2)^2$ باشد، گشتاور جرم (اول) آن را نسبت به مبدا مختصات محاسبه کنید.

پاسخ: ناحیه مورد نظر یک دوک به شکل ۳۰.۲- (ب) است. اما، Ω از بالا به نیم کره $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ و از پایین به نیم مخروط $z = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود است. بنابراین می توان نوشت

$$\Omega : 0 \leq z, 3(x^2 + y^2) \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$$

این ناحیه را به مختصات کروی می بریم:

$$\Omega' : 0 \leq \rho \cos \varphi, 3\rho^2 \sin^2 \varphi \leq \rho^2 \cos^2 \varphi, \rho^2 \leq 36$$

$$: 0 \leq \cos \varphi, 3 \sin^2 \varphi \leq \cos^2 \varphi, 0 \leq \rho \leq 6$$

$$: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \rho \leq 6$$

توجه شود که مطابق فرض اولیه در تعریف مختصات کروی $0 \leq \varphi \leq \pi$ و $0 \leq \rho$. به این ترتیب، گشتاور جرمی مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}M_0 &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \delta(x, y, z) dV \\ &= \iiint_{\Omega} \exp(x^2 + y^2 + z^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = \iiint_{\Omega'} e^{\rho^4} \rho^3 \sin \varphi dV\end{aligned}$$

۱۶.۲. پاسخ مسایل امتحان شانزدهم ۱۴۲ فصل ۲. پاسخ مسایل

$$= \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/6} \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^6 e^{\rho^4} \rho^3 d\rho \right) \\ = \frac{1}{4} [\theta]_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_0^{\pi/6} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^6 = \frac{\pi}{4} (2 - \sqrt{3})(e^{81} - 1).$$

۷.۱۶. فرض کنید $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/4} \sin(e^{\sqrt{xyz}})\mathbf{k}$ و بردار قائم برونسوی پوسته بیضوی S به معادله $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ با $0 \leq z$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) d\sigma$ را محاسبه کنید.

پاسخ: از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. برای این منظور بایستی لبه S را به صورت سازگار با S جهت‌دار نمود. به شکل ۳۱.۲-الف) توجه شود. بنابراین، باید جهت منحنی C لبه S به صورت نشان داده شده در شکل ۳۱.۲-الف) باشد. این منحنی فصل مشترک صفحه $z=0$ و بیضیگون $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ است. یعنی $C : 4x^2 + 9y^2 = 36, z=0$ یا $C : x^2/9 + y^2/4 = 1, z=0$. این منحنی را به صورت

$$C : \mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi,$$

پارامتره می‌کنیم. بنابراین،

$$\iint_S \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

اما چون C تماماً در صفحه Oxy قرار دارد. انتگرال خط بالا عملاً بر منحنی C محاسبه می‌شود

شکل ۳۱.۲:

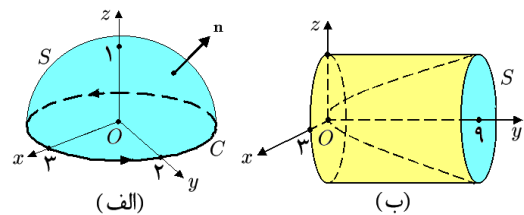
الف) مسأله

۷ از امتحان

شانزدهم (ب)

مسأله ۸ از

امتحان شانزدهم



و بعلاوه بجای $\mathbf{F}$ از تحدید آن بر صفحه Oxy می‌توان استفاده نمود. یعنی از $\bar{\mathbf{F}}(x, y) = (y, x^2)$. بنابراین، انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\iint_S \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_C \bar{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r},$$

که تمام شرایط قضیه گرین در این حالت برقرار است. در واقع منحنی $\bar{C}$ یک منحنی ژردان است که لبه ناحیه $D : x^2/9 + y^2/4 \leq 1$ است. بنابراین، مطابق قضیه گرین داریم

$$\iint_S \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D (2x-1) dA = 2 \iint_D x dA - \iint_D dA$$

$$\stackrel{(1)}{=} 0 - \text{Area}(D) = -6\pi.$$

توضیح اینکه در (۱) از زوج بودن تابع $2x$ نسبت به x و تقارن D نسبت به x استفاده نموده‌ایم، بنابراین انتگرال $2x$ بر D صفر شده است.

۸.۱۶. پاسخ: ابتدا رویه S به شکل 31.2 -(ب) ترسیم می‌کنیم. روشن است که اگر درون S را Ω بنامیم، در این صورت Ω در راستای محور y ها است و برای تعیین حدود آن بهتر است آن را بر صفحه Oxz تصویر کنیم. برای این منظور معادلات استوانه و سهمیگون را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow y = 9 \Rightarrow x^2 + z^2 = 9.$$

بنابراین، تصویر Ω بر صفحه Oxz عبارت است از قرص $x^2 + z^2 \leq 9$ و می‌توان نوشت

$$\Omega : x^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x^2 + z^2.$$

به این ترتیب، به کمک قضیه دیورژانس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \oiint_{(S)} \text{div} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{F}) dV \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial(xz^2)}{\partial x} + \frac{\partial(yx^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-2yz)}{\partial z} \right) dV \\ &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 - 2y) dV. \end{aligned}$$

در ادامه از مختصات استوانه‌ای در راستای محور y استفاده می‌کنیم. یعنی، فرض می‌کنیم: $x = r \cos \theta$ ، $z = r \sin \theta$ و $y = y$. در این صورت ژاکوبی تبدیل $J = r$ است و تصویر Ω در فضای $Oy\theta$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \Omega' : r^2 &\leq 9, 0 \leq y \leq r^2, \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq y \leq r^2. \end{aligned}$$

بنابراین، داریم

$$\oiint_{(S)} \text{div} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 - 2y) dV$$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_{\Omega'} (r^2 - 2y) r dV' = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^3 \left[\int_0^{r^2} (r^2 - 2ry) dy \right] dr \\
 &= 2\pi \int_0^3 [r^2 y - ry^2]_0^{r^2} dr = 2\pi \int_0^3 (r^4 - r^5) dr \\
 &= 2\pi \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6} \right]_0^3 = -\frac{3^6}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان هفدهم

۱.۱۷. نشان دهید که منحنی $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 9t, 3t - 3t^2, 2t^2 - 3t + 5)$ مسطحه است و سپس معادله صفحه‌ای که منحنی بر آن قرار دارد را بیابید.^۱

پاسخ: کافی است نشان داده شود که تاب منحنی صفر است، برای این منظور نیز کافی است نشان داده شود که $\mathbf{r}'''(t)$ صفر است. اما چنانچه لازم بدانیم معادله صفحه را بدست بیاوریم، کافی است به روش زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 9t^2, \\ y = 3t^2 - 3t^2, \\ z = 2t^2 - 3t + 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -6t^2, \\ y + z = 5 - t^2, \end{cases} \Rightarrow x = 30 + 3y + 6z.$$

۲.۱۷. فرض کنید $w = f(x, y)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $x = u + v$ و $y = uv^2$ در این صورت $\partial^2 w / \partial u \partial v$ را محاسبه کنید.

پاسخ: به کمک قاعده زنجیره‌ای مشتق داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 2uv \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2v \frac{\partial f}{\partial y} + 2uv \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + 2v \frac{\partial f}{\partial y} + 2uv \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v(v + 2u) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2uv^3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

۳.۱۷. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \text{ اگر} \\ -x & |x| > |y| \text{ اگر} \end{cases}$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

در مبداء پیوسته است و مشتقات جزئی آن نیز در مبداء وجود دارند، در حالی که این تابع در مبداء مشتقپذیر نیست.

پاسخ: باید اثبات گردد که

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall (x, y) (\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon).$$

اگر $\delta < \sqrt{x^2 + y^2}$ ، آنگاه $|x| < \delta$ ، $|y| < \delta$ و بنابراین

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |\pm x - 0| = |x| < \delta.$$

پس با فرض $\delta = \varepsilon$ به پیوستگی f در مبداء پی می‌بریم. از طرفی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & |x| < |y| \\ -1 & |x| > |y| \end{cases}$$

و در $(x, y) = (0, 0)$ ، مطابق تعریف داریم

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x} = -1. \end{aligned}$$

زیرا در این حالت $|x| > |y| = 0$ ، به صورت مشابه

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0. \end{aligned}$$

در حالی که f در $(0, 0)$ مشتقپذیر نیست. زیرا (فرض خلف) اگر $f'(0, 0) = (a, b)$ ، آنگاه مطابق تعریف

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - (a, b) \cdot ((x, y) - (0, 0))|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = 0.$$

چنانچه مسیر $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$ را بگیریم، خواهیم داشت

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|-t - at|}{|t|} = |a + 1| \quad \text{بنابراین} \quad a = -1$$

و اگر مسیر $\mathbf{r}(t) = (0, t)$ را بگیریم، خواهیم داشت

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|0 - bt|}{|t|} = |b| \quad \text{بنابراین} \quad b = 0$$

در حالی که با انتخاب مسیر $\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$ داریم

$$a + 2b = 1 \quad \text{بنابراین} \quad 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t - at - 2bt|}{(a + 4b^2)|t|} = |1 - a - 2b|$$

در نتیجه $-2 = 1$. این تناقض به معنی عدم درستی فرض مشتق پذیری f در نقطه $(0, 0)$ است.

۴.۱۷. اکسترمومهای موضعی تابع $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا نقاط تکین تابع f را مشخص می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0 \\ x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بنابراین، $y^2 \ln(x^2 + y^2) = x^2 \ln(x^2 + y^2)$ در نتیجه، یا $\ln(x^2 + y^2) = 0$ و لذا $x^2 + y^2 = 1$ ، و یا در غیر این صورت $y^2 = x^2$ و بنابراین $y = \pm x$ اکنون،

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = \pm x, \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2y = 0, \\ y = \pm x, \\ x(\ln(2x^2) + 1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm 1, \\ y = 0, \\ x = \pm 1, \\ y = \pm x, \\ x = \pm 1/\sqrt{2e}. \end{cases}$$

پس جمعاً تابع f دارای هشت نقطه تکین است:

$$\begin{aligned} X_1 &= (0, 1), & X_2 &= (0, -1), & X_3 &= (1, 0), \\ X_4 &= (-1, 0), & X_5 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), & X_6 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right), \\ X_7 &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), & X_8 &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right). \end{aligned}$$

f در چهارتای اول صفر است و در چهارتای دوم برابر $\pm \frac{1}{2e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \pm \frac{1}{2e}$ می‌باشد. از طرفی

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln(x^2 + y^2) + 2 \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}, \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, & D &= AC - B^2. \end{aligned}$$

	A	B	C	D	نتیجه
X_1	0	2	0	-4	نقطهٔ زینی
X_2	0	2	0	-4	نقطهٔ زینی
X_3	0	2	0	-4	نقطهٔ زینی
X_4	0	2	0	-4	نقطهٔ زینی
X_5	2	0	2	4	مینیم موضعی
X_6	-2	0	-2	4	ماکزیموم موضعی
X_7	-2	0	-2	4	ماکزیموم موضعی
X_8	2	0	2	4	مینیم موضعی

پس f دارای دو نقطهٔ ماکزیموم موضعی در نقاط X_6 و X_7 است و مقدار f در این نقاط برابر $1/2e$ است. همچنین، f دارای دو نقطهٔ مینیموم موضعی در نقاط X_5 و X_8 است و مقدار f در این نقاط برابر $-1/2e$ است.

۵.۱۷. فرض کنید D ناحیهٔ محدود به چهار سهمی $x^2 = \pi y$ ، $2x^2 = \pi y$ ، $y^2 = x$ و $2y^2 = x$ است و چگالی نقطه به مختصات (x, y) از D برابر $\sin(xy)/y$ می‌باشد. گشتاور D حول محور y ها را محاسبه کنید.

پاسخ: ملاحظه می‌شود که در این مسأله

$$D : x^2 \leq \pi y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 2y^2.$$

به بیان دیگر $1 \leq \pi y/x^2 \leq 2, 1 \leq x/y^2 \leq 2$. به شکل ۱.۱- (ب) توجه شود. بنابراین، اگر فرض کنیم $u = \pi y/x^2$ و $v = x/y^2$ ، در این صورت تصویر D در صفحهٔ Ouv عبارت است از مربع

$$D' : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2,$$

بعلاوه $uv = \pi/xy$ و

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1 \div \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \\ &= 1 \div \left\| \begin{pmatrix} -2\pi y^2/x^3 & 1/y^2 \\ \pi/x^2 & -2x/y^3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{x^2 y^2}{3\pi} = \frac{\pi}{3u^2 v^2}. \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D x^2 \delta dA = \iint_D x^2 \frac{\sin(xy)}{y} dA \\ &= \iint_{D'} \frac{\pi}{u} \sin\left(\frac{\pi}{uv}\right) \frac{\pi}{3u^2 v^2} dA' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi^2}{3} \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{1}{u^3 v^2} \sin\left(\frac{\pi}{uv}\right) du \right] dv \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^2 \left[-\sin\left(\frac{\pi}{uv}\right) + \frac{\pi}{uv} \cos\left(\frac{\pi}{uv}\right) \right]_1^2 dv \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^2 \left\{ \frac{\pi}{2v} \cos\left(\frac{\pi}{2v}\right) - \frac{1}{v} \sin\left(\frac{\pi}{2v}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{v}\right) - \frac{\pi}{v} \cos\left(\frac{\pi}{v}\right) \right\} dv \\
 &= \frac{1}{3} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2v}\right) + v \sin\left(\frac{\pi}{v}\right) + \pi \ln\left(\frac{\pi}{2v}\right) + 3 \ln(v) \right]_1^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

۶.۱۷. قضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = (-y^3, x^3)$ و منحنی نشان داده شده در شکل ۱۰.۱-الف) تحقیق کنید.

پاسخ: الف) به کمک قضیه. درون منحنی C نشان داده شده در شکل ۱۰.۱-الف) عبارت است از $D = D_1 - D_2$ که در آن

$$D_1 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x,$$

$$D_2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \iint_D (Q_x - P_y) dA &= \iint_D 3(x^2 + y^2) dA \\
 &= 3 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dA - 3 \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dA \\
 &= 3 \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy \right] dx - 3 \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} r^3 dr \right] d\theta \\
 &= \int_0^2 [y^3 + 3yx^2]_0^{2-x} dx - 3[\theta]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= 4 \int_0^2 (2 - 3x + 3x^2 - x^3) dx - \frac{3\pi}{8} = 8 - \frac{3\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

ب) به روش مستقیم. با توجه به شکل ۱۰.۱-الف) ملاحظه می‌شود که منحنی $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ از چهار قسمت تشکیل می‌گردد:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x, 0 \leq y, \text{ باجهت عکس مثلثاتی}$$

$$: \mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t) ; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$C_2 : \mathbf{r}(t) = (1 - t)(1, 0) + t(2, 0)$$

$$= (1 + t, 0) ; 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_3 : \mathbf{r}(t) = (1-t)(2,0) + t(0,2)$$

$$= (2-2t, 2t) ; 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_4 : \mathbf{r}(t) = (1-t)(0,2) + t(0,1)$$

$$= (0, 2-t) ; 0 \leq t \leq 1.$$

در نتیجه، داریم

$$\oint_C P dx + Q dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} P dx + Q dy = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\sin t, \cos t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^3 t, \sin^3 t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt \\ &= -\int_0^{\pi/2} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt = -\int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t \cos^2 t) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (3 + \cos(4t)) dt = -\frac{1}{4} \left[3t + \frac{1}{4} \sin(4t) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{3\pi}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_0^1 \mathbf{F}(1+t, 0) \cdot (1, 0) dt \\ &= \int_0^1 (0, (1+t)^3) \cdot (1, 0) dt = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{C_3} P dx + Q dy = \int_0^1 \mathbf{F}(2-2t, 2t) \cdot (-2, 2) dt \\ &= \int_0^1 (-8t^3, 8(1-t)^3) \cdot (-2, 2) dt = 16 \int_0^1 (1-3t+3t^2) dt = 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{C_4} P dx + Q dy = \int_0^1 \mathbf{F}(0, 2-t) \cdot (0, -1) dt \\ &= \int_0^1 (-(2-t)^3, 0) \cdot (0, -1) dt = 0. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\oint_C P dx + Q dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 8 - \frac{3\pi}{8}.$$

۱۷.۷. فرض کنید

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - y^4 + z^5, y^3 - z^4 + x^5, z^3 - x^4 + y^5),$$

و S سطح خارجی $\Omega : |x| + |y| + |z| \leq 1$ باشد. انتگرال $\mathbf{F}$ بر S را محاسبه کنید.

پاسخ: از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. چون Ω نسبت به مبدأ متقارن است، کافی است بر قسمتی از آن که در یک هشتم اول قرار دارد انتگرال بگیریم و سپس پاسخ را در هشت ضرب کنیم. اما این یک هشتم ناحیه عبارت است از

$$\Omega_1 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z \leq 1, \\ : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

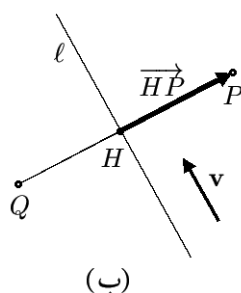
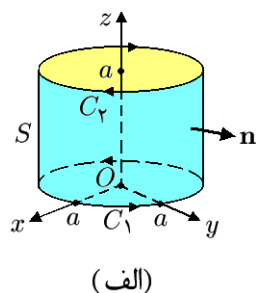
بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= 24 \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dV \stackrel{(1)}{=} 72 \iiint_{\Omega_1} x^2 dV \\ &= 72 \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} x^2 dz \right] dy \right] dx \\ &= 72 \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} x^2 (1 - x - y) dy \right] dx \\ &= -36 \int_0^1 x^2 (1 - x)^2 dx = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

توضیح اینکه اگر در عبارت سمت چپ تساوی $(1) x, y$ و یا z را با هم عوض کنیم، هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود. بنابراین، انتگرال x^2, y^2 و z^2 بر Ω_1 با هم برابرند. پس کافی است یکی را محاسبه نمود و حاصل را در سه ضرب کرد.

۸.۱۷. فرض کنید S قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ است که به صفحات $z = a$ و $z = 0$ محدود شده است و $\mathbf{n}$ بردار یکه قائم بر سطح است که رو به خارج از آن دارد. قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz, 2 - x + 3y, x^2 + z)$ و رویه S تحقیق کنید.

پاسخ: الف) به روش مستقیم. با توجه به شکل ۳۲.۲- الف) لبه S عبارت است از $C = C_1 \cup C_2$ که در آن



شکل ۳۲.۲:
الف) مسئله ۸
از امتحان هفدهم
ب) مسئله ۲ از
امتحان هجدهم

با جهت سازگار با $\mathbf{k}$ ، $z=0$ ، $C_1 : x^2 + y^2 = a^2$

با جهت سازگار با $\mathbf{k}$ ، $z=a$ ، $C_2 : x^2 + y^2 = a^2$

آنها را به صورت

$$C_1 : \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, 0) ; 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$C_2 : \mathbf{r}(t) = (a \sin t, a \cos t, a) ; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

پارامتره می‌کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 2 - a \cos t + 3a \sin t, a^2 \cos t) \cdot (-a \sin t, a \cos t, 0) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (2a^2 \cos t, 2 - a \sin t + 3a \cos t, a^2 \sin^2 t + a) \cdot (a \cos t, -a \sin t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \{2a \cos t - 2a \sin t + 2a^3 \cos^2 t\} dt = 2\pi a^3. \end{aligned}$$

(ب) به کمک قضیه استوکس. با توجه به شکل ۳۲.۲- (الف) رویه S عبارت است از

$$S : x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq a.$$

این رویه را به کمک مختصات استوانه‌ای به صورت زیر پارامتره می‌کنیم:

$$S : x = a \cos u, y = a \sin u, z = v ; (u, v) \in D$$

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v) ; (u, v) \in D$$

که در آن $D : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq a$ در این صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin u & a \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{n} d\sigma = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv \\ &= (a \cos u, a \sin u, 0) du dv. \\ &= (a \cos u, a \sin u, 0), \end{aligned}$$

از طرفی

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2yz & 2-x+3y & x^2+z \end{vmatrix}$$

$$= (0, 2y - 2x, -1 - 2z).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (0, 2a \sin u - 2a \cos u, -1 - 2v) \cdot (a \cos u, a \sin u, 0) du dv \\ &= \iint_D (2a^2 \sin^2 u - 2a^2 \cos u \sin u) du dv \\ &= 2a^2 \left(\int_0^a dv \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 u - \cos u \sin u du \right) = 2a^3 \pi. \end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان هجدهم

۱.۱۸. مقدار دترمینان زیر را بازنه هر $n \in \mathbb{N}$ ای بدست آورید: ^۱

$$a_n := \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

پاسخ: با محاسبه مستقیم داریم

$$a_1 = |1| = 1, \quad a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

اگر $3 \leq n$ و به جای ستون دوم، ستون دوم منحنی ستون اول و به جای ستون سوم، ستون سوم منحنی ستون اول را قرار داده‌ایم. نتیجه خواهیم گرفت

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & n \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n(n-1)+1 & 1 & 1 & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n = 1 \\ -2 & \text{اگر } n = 2 \\ 0 & \text{اگر } n \geq 3 \end{cases}$$

۲.۱۸. قرینه نقطه $P = (2, -5, 7)$ نسبت به خط $z = \frac{y-1}{2} = \frac{x+3}{2}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا پای عمود H وارد از $P = (2, -5, 7)$ بر خط داده شده ℓ را بدست می‌آوریم. برای این منظور خط ℓ را پارامتره می‌کنیم:

$$\ell : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = z \xrightarrow{z=t} \ell : x = 2t-3, y = 2t+1, z = t.$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

بنابراین، می‌توان فرض نمود که $H = (2t - 3, 2t + 1, t)$. همان طور که در شکل ۳۲.۲- (ب) مشهود است بایستی $HP = P - H = (5 - 2t, -6 - 2t, 7 - t)$ بر بردار $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ هادی خط ℓ عمود باشد: شرط لازم و کافی برای عمود بودن $\overrightarrow{HP}$ بر ℓ این است که $\overrightarrow{HP}$ بر $\mathbf{v}$ عمود باشد. اما این یعنی $\overrightarrow{HP} \cdot \mathbf{v} = 0$ یا $2(5 - 2t) + 2(-6 - 2t) + 1(7 - t) = 0$. از حل این معادل به $5 - 9t = 0$ یا $t = 5/9$ می‌رسیم. در نتیجه، $H = (35/9, -64/9, 68/9)$. اکنون با توجه به شکل ۳۲.۲- (ب) منعکس نقطه P نسبت به خط ℓ عبارت است از

$$Q = P - 2\overrightarrow{HP} = 2H - P = \left(\frac{52}{9}, -\frac{38}{9}, \frac{73}{9}\right).$$

۳.۱۸

با فرض این که

$$f(x, y) = \begin{cases} y + x \sin(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که

الف) حد $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ وجود دارد؛

ب) حد $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ وجود دارد؛ در حالی که

ج) حد $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ وجود ندارد.

پاسخ: الف) با توجه به اینکه

$$\left| y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq |y| + |x| \left| \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq |y| + |x| < 2\delta.$$

بنابراین، کافی است فرض شود $\delta = \varepsilon/2$ و $\delta < \|(x, y) - (0, 0)\|$. در این صورت خواهیم داشت $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$ و حکم الف نتیجه می‌گردد.

ب) با محاسبه مستقیم مشاهده می‌گردد که

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (y + 0) = 0.$$

(ج) برای اثبات حکم (ج) دنباله $y_n := 2/(2n+1)\pi$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{(2n+1)\pi} + x \sin \left((2n+1) \frac{\pi}{2} \right) \right\} = x \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n,$$

که وجود ندارد. بنابراین، حد $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ برای x های مخالف صفر وجود ندارد و لذا حد (ج) نیز وجود ندارد.

۴.۱۸. با فرض $u = x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$ ، ثابت کنید $nu = xu_x + \alpha y u_y + \beta z u_z$.

پاسخ: با فرض $s = y/x^\alpha$ و $t = z/x^\beta$ و به کمک قائده زنجیره‌ای مشتق داریم $u = f(s, t)$ و

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= x \{ nx^{n-1} f + x^n f_t t_x + x^n f_s s_x \} + \alpha y x^n \{ f_t t_y + f_s s_y \} + \beta z x^n \{ f_t t_z + f_s s_z \} \\ &= x \{ nx^{n-1} f + x^n f_t (-\beta x^{-\beta} y) + x^n f_s (-\alpha x^{-\alpha} z) \} + \alpha y x^n \{ 0 + f_s x^{-\alpha} \} + \beta z x^n \{ f_t x^{-\beta} + 0 \} \\ &= nx^n f - f_t \beta x^{n-\beta} y - f_s \alpha x^{n-\alpha} z + f_s \alpha x^{n-\alpha} y + f_t \beta x^{n-\beta} z \\ &= nx^n f = nu. \end{aligned}$$

۵.۱۸. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int_0^2 \left[\int_x^2 [x+y] dy \right] dx$ ب) $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin(x^2) dy \right] dx.$

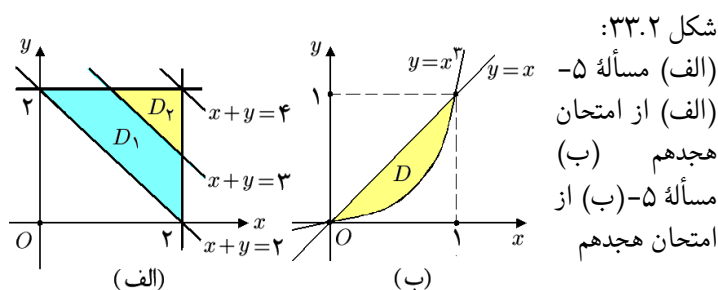
پاسخ: الف) به جهت اینکه تابع $[x+y]$ به ازای نقاط در نوار $n \leq x+y < n+1$ مقدار n را اختیار می‌کند، مجموعه D را به صورت $D = D_1 + D_2$ می‌نویسیم که در آن:

$$D_1 : 2 \leq x+y \leq 3, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2,$$

$$D_2 : 3 \leq x+y \leq 4, 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2.$$

به شکل ۳۳.۲-الف) توجه شود. لازم به ذکر است که $[x+y]$ بر کل D_1 برابر ۲ است به جز بر مناطقی از لبه آن که چون این مجموعه مساحت نمی‌سازد، می‌توان فرض کرد $[x+y]$ بر کل D_1 برابر ۲ است. به همین ترتیب $[x+y]$ بر کل D_2 برابر ۳ است. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[\int_x^2 [x+y] dy \right] dx &= \iint_D [x+y] dA \\ &= \iint_{D_1} 2 dA + \iint_{D_2} 3 dA = 2 \text{Area}(D_1) + 3 \text{Area}(D_2) \\ &= 2 \text{Area}(D_1 \cup D_2) + \text{Area}(D_2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



(ب) چنانچه حدود این انتگرال را باز نویسی کنیم، به $\sqrt[3]{y}$ ، $y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$ ، $0 \leq y \leq 1$ می‌رسیم. به شکل ۳۳.۲- (ب) توجه شود. این مجموعه به شکل y -منظم است. آن را به صورت x -منظم باز نویسی می‌کنیم: $0 \leq x \leq 1$ ، $x^3 \leq y \leq x$. در نتیجه

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin(x^2) dx \right] dy = \iint_D \sin(x^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^x \sin(x^2) dy \right] dx = \int_0^1 (x - x^3) \sin(x^2) dx. \end{aligned}$$

با فرض $t = x^2$ داریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-t) \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1) d \cos t \\ &= \frac{1}{2} \left[(t-1) \cos t \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \sin 1). \end{aligned}$$

۱۸.۶. متوسط تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$ بر مجموعه $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ را محاسبه کنید.

پاسخ: مسأله را به مختصات کروی می‌بریم. در این صورت، تصویر Ω در فضای $O\rho\theta\varphi$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \Omega' : \rho^2 &\leq 4\rho \cos \varphi, \\ : 0 &\leq \rho \leq 4 \cos \varphi, 0 \leq \cos \varphi, \\ : 0 &\leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi. \end{aligned}$$

در نتیجه، متوسط تابع f برابر است با

$$\text{mean } f = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f dV$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \times 2^3} \iiint_{\Omega} \{x^2 + y^2 + z^2\} dV = \frac{3}{2^5\pi} \iiint_{\Omega'} \rho^4 \sin\varphi dV \\ &= \frac{3}{2^5\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{4\cos\varphi} \rho^4 \sin\varphi d\rho \right] d\varphi \\ &= \frac{3}{2^4} \int_0^{2\pi} \frac{(4\cos\varphi)^5}{5} \sin\varphi d\varphi = \frac{3 \times 2^6}{5} \int_0^{2\pi} \cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{3}{5} 2^6 \left[-\frac{\cos^6\varphi}{6} \right]_0^{2\pi} = \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

۷.۱۸. در صورتی که $C : \max\{|x|, |y|\} = a, z = 1$ و نقطه (x, y, z) از C دارای چگالی جرم $f = |xyz|$ باشد، گشتاور ماند C حول $-z$ محور را محاسبه کنید.

پاسخ: منحنی C و چگالی نسبت به تغییر متغیر $x \rightarrow -x$ یا $y \rightarrow -y$ پایدار است. لذا با فرض $0 \leq y, 0 \leq x$ می‌توان مسأله را حل کرد و پاسخ را در چهار ضرب نمود. اما در این صورت

$$C_{1/4} : 0 \leq x, 0 \leq y, \max\{x, y\} = a, z = 1,$$

و می‌توان نوشت $C_{1/4} = C_1 + C_2$ که در آن

$$C_1 : 0 \leq x, 0 \leq y, x \leq y = a, z = 1,$$

$$C_2 : 0 \leq x, 0 \leq y, y \leq x = a, z = 1.$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta ds \\ &= 4 \int_{C_{1/4}} (x^2 + y^2) xyz ds = 4 \int_{C_1} + 4 \int_{C_2} \\ &= 4 \int_0^a (x^2 + a^2) xa 1 \|\vec{(x, 0, 0)}\| dx + 4 \int_0^a (a^2 + y^2) ay 1 \|\vec{(0, y, 0)}\| dy \\ &= 4a \int_0^a (x^2 + a^2) x^2 dx + 4a \int_0^a (y^2 + a^2) y^2 dy \\ &= 8a \int_0^a (y^2 + a^2) y^2 dy = 8a \left[\frac{x^5}{5} + a^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{128}{15} a^6. \end{aligned}$$

۸.۱۸. از تابع $\mathbf{F} = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$ بر سطح خارجی جسم

$$\Omega : |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| \leq 1,$$

انتگرال بگیرید.

پاسخ: از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. داخل رویه بسته S در این مسأله

$$\Omega : |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| \leq 1,$$

است و بعلاوه $\text{div}(\mathbf{F}) = 3$. در ادامه از تغییر متغیر خطی

$$u = x - y + z, \quad v = y - z + x, \quad w = z - x + y,$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = 1 \div \left| \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right| \\ &= 1 \div \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

به علاوه تصویر Ω در uvw -فضا عبارت است از $\Omega' : |u| + |v| + |w| \leq 1$. اما Ω' نسبت به مبدا متقارن است و لذا حجم آن هشت برابر حجم قسمتی از آن است که در یک هشتم اول قرار دارد. این مجموعه Ω_1 یک هرم قائم با ابعاد یک در uvw -فضا است. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{F}) dV &= \iiint_{\omega} 3 dV = 3 \iiint_{\Omega'} \frac{1}{4} dV' \\ &= \frac{3}{4} \text{Vol}(\Omega') = \frac{3}{4} \text{Vol}(\Omega_1) \\ &= 6 \text{Vol}(\Omega_1) = 6 \times \frac{1}{6} \times 1 \times 1 = 1. \end{aligned}$$

۹.۱۸. از میدان برداری $\mathbf{F} = (x, x+y, x+y+z)$ بر منحنی زیر انتگرال بگیرید:

$$C : \mathbf{r}(t) = (a \sin t, a \cos t, a \sin t + a \cos t) ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

پاسخ: چون منحنی C بسته است، از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. توجه شود که توابع مختصات C عبارتند از: $x = a \sin t$, $y = a \cos t$ و $z = a \sin t + a \cos t$. اینها در روابطه $x^2 + y^2 = a^2$ و $z = x + y$ صدق می‌کنند. یعنی C فصل مشترک صفحه $z = x + y$ و استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ می‌باشد. پس، می‌شود فرض نمود که C لبه رویه

$$S : z = x + y, \quad (x, y) \in D, \quad D : x^2 + y^2 \leq a^2.$$

است. تابع معرف S با ضابطه $f = x + y - z$ است. در نتیجه،

$$\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{f'}{|f_z|} dx dy = \pm (1, 1, -1) dx dy.$$

چون جهت بر C همساز با $-z$ -محور است، پس $\mathbf{n}$ باید رو به بالا باشد، یعنی علامت مختص سوم آن مثبت باشد. پس باید حالت $-$ را انتخاب نمود. از طرفی،

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = (1, -1, 1).$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D (1, -1, 1) \cdot (-1, -1, 1) dx dy \\ &= \iint_D dx dy = \text{Area}(D) = \pi a^2. \end{aligned}$$

پاسخ مسایل امتحان نوزدهم

۱.۱۹. تنها به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید:

الف) اگر z تابعی از x و y بوده و u و v دو متغیر دیگر باشند به نحوی که $u = \ell x + my$ و $v = -mx + \ell y$ درستی رابطه زیر را نشان دهید:^۱

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\ell^2 + m^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$$

ب) اگر f و g توابع مشتق پذیر بوده و z تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشند به گونه‌ای که $f(x, y, z) = 0$ و $g(x, y, z) = 0$ در این صورت نشان دهید:

$$\frac{dx}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}.$$

پاسخ: الف) به کمک قاعده زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \ell \frac{\partial z}{\partial u} - m \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \ell \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \ell \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - m \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \ell \left(\ell \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - m \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) - m \left(\ell \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - m \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \\ &= \ell^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\ell m \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

به صورت مشابه

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\ell m \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \ell^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

و بنابراین

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\ell^2 + m^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۱۹۰۲. پاسخ مسایل امتحان نوزدهم ۱۶۲ فصل ۲. پاسخ مسایل

ب) اگر C را منحنی فصل مشترک دو رویه $f = 0$ و $g = 0$ بنامیم که توسط $\mathbf{r}(t)$ پارامتره شده است، در این صورت بردار مماس بر C در نقطه t برابر است با

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

از طرفی حاصلضرب خارجی بردار گرادیان f در $\mathbf{r}(t)$ و نیز بردار گرادیان g در $\mathbf{r}(t)$ ، یعنی بردار

$$\begin{aligned} \nabla f \times \nabla g &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \right). \end{aligned}$$

به منحنی C مماس است. اکنون کافی است شرط توازی $d\mathbf{r}/dt$ و $\nabla f \times \nabla g$ را نوشته و طرفین را در dt ضرب کنیم. به این ترتیب رابطه مورد نظر بدست خواهد آمد.

۲.۱۹. سه خط d_1, d_2 و d_3 با بردارهای هادی به ترتیب

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

از مبدا می‌گذرند. ابتدا نشان دهید که این سه خط روی یک صفحه قرار دارند و سپس معادله این صفحه را بنویسید.

پاسخ: شرط لازم و کافی برای مسطحه بودن این سه خط آن است که بردارهای هادی آنها وابسته خطی باشند و این معادل با صفر شدن حاصلضرب مختلط آنها می‌باشد:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (19) - (20) + (1) = 0. \end{aligned}$$

برای حصول به صفحه گذرنده از این سه خط، کافی است با ضرب خارجی کردن دو تا از آنها، نرمال صفحه را بدست بیاوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\ &= (19, -10, -1), \end{aligned}$$

و لذا، صفحه مذکور عبارتست از $19x = 10y + z$.

۳.۱۹. در پیوستگی تابع زیر بر کل $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ: اگر $X_0 \neq (0, 0)$ آنگاه f در همسایگی X_0 برابر $x^3 y^2 / (x^6 + y^4)$ است، که کسری از توابع پیوسته است و مخرج آن در X_0 مخالف صفر است، بنابراین در X_0 پیوسته می‌باشد. اگر $X_0 = (0, 0)$ ، در این صورت با فرض $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ داریم

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 t^6}{t^{12} + t^{12}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

پس f در $(0, 0)$ پیوسته نیست. یعنی، f بر $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ پیوسته است.

۴.۱۹. مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید که توسط استوانه به معادله

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1,$$

بریده می‌شود. در آن a و b اعداد مثبتند.

پاسخ: فرض می‌کنیم $1 \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \leq D$ ، در این صورت مساحت مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_D dx dy. \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $x = ar^3 \cos^3 \theta$ و $y = br^3 \sin^3 \theta$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| &= \left\| \begin{matrix} +3ar^2 \cos^3 \theta & -3ar^3 \sin \theta \cos^2 \theta \\ +3br^2 \sin^3 \theta & 3br^3 \cos \theta \sin^2 \theta \end{matrix} \right\| \\ &= 9abr^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{9}{4}abr^5 \sin^2(2\theta), \end{aligned}$$

و تصویر D در صفحه $Or\theta$ عبارت است از $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $0 \leq r \leq 1$. بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} \iint_{D'} \frac{9}{4}abr^5 \sin^2(2\theta) dr d\theta \\ &= \frac{9ab}{4} \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 r^5 dr \right) \\ &= \frac{9}{4}ab \sqrt{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{8} \sin(4\theta) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \pi ab \sqrt{2}. \end{aligned}$$

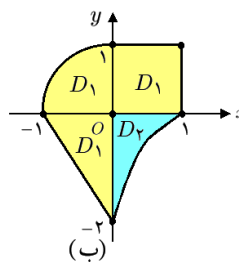
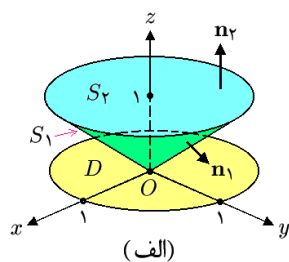
۱۹.۲. پاسخ مسایل امتحان نوزدهم ۱۶۴ فصل ۲. پاسخ مسایل

۵.۱۹. قسمتی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که توسط صفحه $z = 1$ محدود شده است و نیز قسمتی از صفحه $z^2 = x^2 + y^2$ بریده شده است را S می‌نامیم و فرض می‌کنیم که

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}.$$

در این صورت درستی قضیه دیورژانس (= واگرایی) را برای رویه S و میدان $\mathbf{F}$ تحقیق کنید.

پاسخ: الف) به کمک قضیه دیورژانس. در این مسأله درون رویه بسته S مخروطی است توپر:



شکل ۳۴.۲:

الف) مسأله ۵

از امتحان نوزدهم

ب) مسأله ۷ از

امتحان نوزدهم

$$\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, z \leq 1, 0 \leq z,$$

$$: x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1.$$

حجم این مجموعه برابر

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \text{Area}(D) \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3},$$

است، که در آن $D : x^2 + y^2 \leq 1$ و $h = 1$. در ادامه، داریم

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{F}) dV = \iiint_{\Omega} 3 dV = 3 \text{Vol}(\Omega) = \pi.$$

ب) محاسبه مستقیم. در اینجا S از دو بخش تشکیل شده است: S_1 و S_2 . به عبارت دیگر

$$S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$S_2 : z = 1, (x, y) \in D.$$

به شکل ۳۴.۲-الف) توجه شود. تابع معرف رویه S_1 عبارت است از $f = x^2 + y^2 - z^2$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 d\sigma &= \pm \frac{f'}{|f_z|} dx dy = \pm \frac{(2x, 2y, -2z)}{|-2z|} dx dy \\ &= \left(x, y, -\sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{\pm dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

که با توجه به مفروضات مسأله و شکل ۳۴.۲- (الف) حالت مثبت در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. در مورد S_2 نیز ملاحظه می‌گردد که

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}, \quad d\sigma = dxdy.$$

پس در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \iint (S) \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D \left(x+y, y+\sqrt{x^2+y^2}, x+\sqrt{x^2+y^2} \right) \cdot \left(x, y, -\sqrt{x^2+y^2} \right) \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\quad + \iint_D (x+y, y+1, x+1) \cdot (0, 0, 1) dxdy \\ &= \iint_D \frac{xy + (y-x)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy + \iint_D (x+1) dxdy \\ &= \iint_D \left[\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right] dxdy + \iint_D dxdy \\ &\stackrel{(1)}{=} 0 + 0 + \text{Area}(D) = \pi \times 1^2 = \pi. \end{aligned}$$

دو انتگرال در قبل از تساوی (۱) به این دلیل صفرند که انتگرال یک تابع فرد بر دامنه متقارن هستند و این نوع انتگرالها همواره صفر است.

۶.۱۹. مطلوبست محاسبه کار انجام شده بوسیله نیروی (= میدان برداری)

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + \cos y - y \sin x) \mathbf{i} + (2x + \cos x - x \sin y) \mathbf{j}.$$

که متحرکی را در جهت مثبت روی مسیر بسته C مطابق شکل ۳۵.۲- (الف) جابجا می‌کند.

پاسخ: از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که درون منحنی معرفی شده در شکل ۳۵.۲- (ب) عبارت است از $D = D_1 \cup D_2$ که این مجموعه‌ها در شکل ۳۴.۲- (ب) معرفی شده‌اند. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D (Q_x - P_y) dxdy \\ &= \iint_D \{ (2 - \sin x - \sin y) - (1 - \sin y - \sin x) \} dxdy \\ &= \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy \\ &= \text{Area}(D_1) + \int_0^1 \left[\int_{-x^2+3x-2}^0 dy \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\pi \times 1^2 + 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{17}{6},$$

۷.۱۹. فرض کنیم $0 < a \leq b$. گشتاور ماند جسم واقع بین کره‌های

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

حول مبدا مختصات را در صورتی بیابید که چگالی حجمی این جسم با فاصله هر نقطه (x, y, z) تا مبدا مختصات برابر باشد.

پاسخ: جسم مورد نظر عبارت است از $\Omega : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ که تصویر آن در مختصات کروی عبارت است از

$$\Omega' : a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

در نتیجه

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

$$= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dV = \iiint_{\Omega'} \rho^5 \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) \left(\int_a^b \rho^5 d\rho \right)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \times [\sin \varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \times \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_a^b = \frac{4\pi}{6} (b^6 - a^6),$$

۸.۱۹

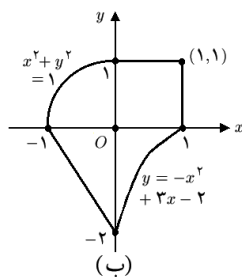
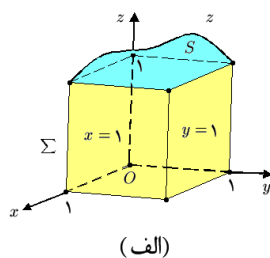
اگر $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z+3)\mathbf{k}$ و S سطح بسته محدود به صفحات مختصاتی، $x=1$ و $y=1$ و نیز سطح هموار دلخواه S نشان داده شده در شکل ۳۵.۲- (ب) باشد، مطلوبست محاسبه شار $\mathbf{F}$ بر S .

پاسخ: چون $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$ پس انتگرال F بر هر سطح بسته‌ای صفر است، فرض می‌کنیم S_1 وجه بالایی مکعب واحد با $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ باشد. یعنی

$$S : z = 1; (x, y) \in D, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{k}, \quad d\sigma = dxdy,$$

که در آن $D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_{(S_1+S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma - \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= 0 - \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= - \iint_D (x, -2y, 1+3) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\ &= 4 \iint_D dx dy = 4 \text{Area}(D) = 4 \times 1 \times 1 = 4. \end{aligned}$$



شکل ۳۵.۲:
(الف) مسأله ۶
از امتحان نوزدهم
(ب) مسأله ۸ از
امتحان نوزدهم

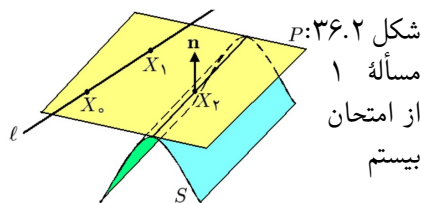
پاسخ مسایل امتحان بیستم

۱.۲۰. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از خط $3x+z=1$, $3y+z=10$ ℓ می‌گذرد و بر رویه $S: x^2+y+z=3$ مماس است.^۱

پاسخ: فرض کنید مسأله حل شده است و P صفحه‌ای با تکیه‌گاه X_0 و نرمال $\mathbf{n}=(a,b,c)$ است که در شرایط مسأله صدق می‌کند. روشن است که X_0 را نقطه‌ای از ℓ می‌توان انتخاب نمود. مثلاً، $X_0=(0,3,1)$. بعلاوه، با فرض $z=4$ به نقطه $X_1=(-1,2,4)$ بر ℓ و در نتیجه بر P می‌رسیم. بنابراین، بایستی X_1 در معادله P صدق کند. یعنی، $\mathbf{n} \cdot (X_1 - X_0) = 0$ یا $a+b=3c$. اما، مطابق صورت مسأله (به شکل ۳۶.۲-ب) توجه شود، بایستی نقطه‌ای چون X_2 بر S یافت گردد که $\mathbf{n}$ با گرادیان تابع $f=x^2+y+z$ معرف S در X_2 موازی باشد: $\mathbf{n} \parallel \nabla f(X_2)$. یعنی، $(a,b,c) \parallel (2x_2, 1, 1)$. به بیان دیگر، بایستی $\frac{a}{2x_2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$. بنابراین $b=c$. از معادله $a+b=3c$ نتیجه می‌شود $a=2c$ و در نتیجه $\mathbf{n}=(2c,c,c)$. (توجه شود که طول $\mathbf{n}$ مهم نیست و لذا می‌توان فرض نمود $\mathbf{n}=(2,1,1)$) بنابراین، معادله صفحه مورد نظر عبارت است از

$$P: \mathbf{n} \cdot (X - X_0) = 0 : 2(x-0) + (y-3) + (z-1) = 0.$$

به بیان دیگر $P: 2x+y+z=4$.



۲.۲۰. بردار یکه مماس بر مسیر حرکت متحرکی که با قانون زیر حرکت می‌کند را در لحظه $t = \sqrt{\pi/2}$ بدست آورید:

$$x = 3 \int_0^t \sin(u^2) du, \quad y = 5 \int_0^t \cos(u^2) du, \quad z = 4 \int_0^t \sin(u^2) du.$$

سپس مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ را در امتداد این بردار و در نقطه $X_0 = (1, 4, 1/2)$ محاسبه کنید.

پاسخ: با توجه به فرمول مشتق از انتگرال داریم

$$\mathbf{r}'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = (3 \sin t^2, 5 \cos t^2, 4 \sin t^2) \Big|_{t=\sqrt{\pi/2}} = (3, 0, 4).$$

^۱ آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

برای محاسبه مشتق امتدادی ابتدا بردار یکه مماس در نقطه $X_0 = \mathbf{r}(\sqrt{\pi/2})$ را تعیین می‌کنیم:

$$\mathbf{T}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\mathbf{r}'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{\|\mathbf{r}'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\|} = \frac{1}{5}(3, 0, 4).$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} Df_{\mathbf{T}(\sqrt{\pi/2})}(X_0) &= f'(X_0) \cdot \mathbf{T}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= (2x, 2y, 2z)\Big|_{X_0} \cdot \frac{1}{5}(3, 0, 4) \\ &= \frac{1}{5}(2, 4, 1) \cdot (3, 0, 4) = 2. \end{aligned}$$

۳.۲۰. فرض کنید $f(u, v, w)$ تابعی مشتقپذیر است و $f(x-y, y-z, z-x) = 0$ در این صورت، مقدار عبارت $1 - x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: فرض کنیم $u = x-y$ ، $v = y-z$ و $w = z-x$. در نتیجه $f(u, v, w) = 0$ و به کمک قانون مشتق از تابع ضمنی، داریم

$$\begin{aligned} 1 - x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 - x \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} - y \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ &= 1 + x \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}} + y \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}} \\ &= 1 + x \frac{-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}{-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}} + y \frac{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}}{-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}} \\ &= \frac{(y-x) \frac{\partial f}{\partial u} + (x-1) \frac{\partial f}{\partial v} + (1-y) \frac{\partial f}{\partial w}}{\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v}}. \end{aligned}$$

۴.۲۰. مساحت آن قسمت از سطح $S: z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ که توسط رویه‌های

$$S_1: x^2 + y^2 = 1, \quad S_2: x^2 + y^2 = 4,$$

جدا شده است و در یک هشتم اول قرار دارد را محاسبه کنید.

پاسخ: با ترسیم تقریبی تابع $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ و رویه‌های S_1 و S_2 ملاحظه می‌گردد که تصویر

۲۰۰۲. پاسخ مسایل امتحان بیستم ۱۷۰ فصل ۲. پاسخ مسایل

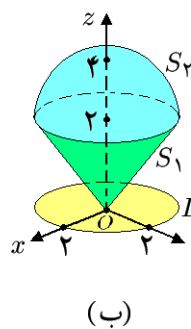
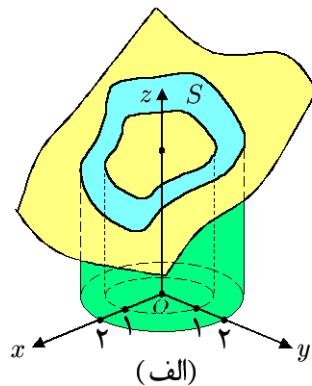
سطح مورد نظر بر xy -صفحه عبارت است از $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. در نتیجه، مساحت مورد نظر برابر است از

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)^2} dA \\ &= \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \sqrt{(x^2 + y^2)^2 + 2} dA \stackrel{(1)}{=} \iint_{D'} \frac{1}{r^4} \sqrt{r^4 + 2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_1^2 r^{-3} (r^4 + 2)^{1/2} dr \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}/4} \frac{u^2 du}{u^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \left[\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + 2u \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}/4} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4} \right) + 4\sqrt{2} - \sqrt{17} \right). \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر متغیر قطبی استفاده نموده‌ایم و

$$D': 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2$$

انتگرال قبل از تساوی (۲) یک انتگرال از دو جمله‌ای دیفرانسیلی است و لذا فرض می‌کنیم $r^4 + 1 = u^2$. به شکل ۳۷.۲- (الف) توجه شود.



شکل ۳۷.۲:
(الف) مسأله ۴
از امتحان نوزدهم
(ب) مسأله ۶ از
امتحان بیستم

۵.۲۰. متحرکی بر مسیر نشان داده شده در شکل ۲۰.۱- (الف) حرکت می‌کند. کار انجام شده توسط این متحرک تأثیر میدان برداری $\mathbf{F} = (yz - 2x)\mathbf{i} + (xz - 2y)\mathbf{j} + (xy - 2z)\mathbf{k}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: آیا میدان داده شده ابقائی است؟ برای پاسخ به این پرسش کرل میدان را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Curl}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz-2x & xz-2y & xy-2z \end{vmatrix} \\ &= (x-x, y-y, z-z) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

پس $\mathbf{F}$ بر کل $\mathbb{R}^3$ ابقائی است. در ادامه، پتانسیل $\mathbf{F}$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \partial f/\partial x = yz-2x, \\ \partial f/\partial y = xz-2y, \\ \partial f/\partial z = xy-2z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = xyz - x^2 + A(y, z), \\ f = xyz - y^2 + B(x, z), \\ f = xyz - z^2 + C(x, y). \end{cases}$$

که $A(y, z)$ ، $B(x, z)$ و $C(x, y)$ توابع دلخواهند. با مقایسه این سه مورد، نتیجه می‌گیریم:

$$f = xyz - x^2 - y^2 - z^2 + E,$$

که E عددی ثابت است. در نتیجه

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = (-2) - (-2) = 0.$$

۶.۲۰. فرض کنید رویه S سطح خارجی جسم محدود به نیم کره $z = 2 + \sqrt{4-x^2-y^2}$ و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ باشد. به کمک قضیه دیورژانس از میدان برداری $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ بر سطح خارجی S انتگرال بگیرید.

پاسخ: ابتدا درون رویه $S = S_1 + S_2$ را مشخص می‌کنیم، که S_1 یک مخروط است و S_2 یک نیم کره می‌باشد. به شکل ۳۷.۲- (ب) توجه شود. با برخورد دادن مخروط و کره، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 2 + \sqrt{4-x^2-y^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = z^2, \\ x^2+y^2+z^2 = 4z, \end{cases} \Rightarrow z^2 = 2z, \Rightarrow z = 0, 2,$$

که $z = 0$ جواب خارجی است. بنابراین، تصویر این جسم دوکی شکل بر xy -صفحه عبارت است از $D: x^2+y^2 \leq 4$. به شکل ۳۷.۲- (ب) توجه شود. به این ترتیب درون رویه S مورد نظر عبارت است از

$$\Omega: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4-x^2-y^2}, (x, y) \in D.$$

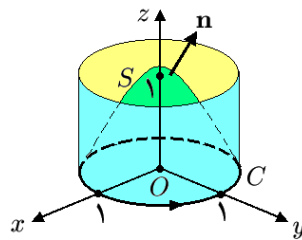
در ادامه لازم است Ω را به مختصات استوانه‌ای ببریم. در این صورت، تصویر Ω در فضای $Or\theta z$ عبارت است از

$$\Omega': r \leq z \leq 2 + \sqrt{4-r^2}, r^2 \leq 4,$$

$$: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2 + \sqrt{4-r^2}.$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV &= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= \iiint_{\Omega'} 3(r^2 + z^2) r dV' \\ &= 3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 \left[\int_0^{2+\sqrt{4-r^2}} (r^3 + rz^2) dz \right] dr \\ &= 6\pi \int_0^2 \left[r^3 z + r \frac{z^3}{3} \right]_0^{2+\sqrt{4-r^2}} dr \\ &= 4\pi \int_0^2 \left\{ r(r^2 + 8) \sqrt{4-r^2} + 16r \right\} dr \\ &= \frac{8\pi}{15} \left[-(16+r^2)(4-r^2)^{3/2} + 80r^2 \right]_0^2 = \frac{768}{5} \pi. \end{aligned}$$



شکل ۳۸.۲:
مسأله ۷
از امتحان
بیستم

۷.۲۰. فرض کنید رویه S سطح خارجی جسم محدود به نیم کره $z = 2 + \sqrt{4-x^2-y^2}$ و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ باشد. به کمک قضیه دیورژانس از میدان برداری $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ بر سطح خارجی S انتگرال بگیرید.

پاسخ: مقدار کار انجام شده توسط متحرکی که بر منحنی بسته

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z = 1,$$

حرکت می‌کند و تحت تأثیر میدان برداری $\mathbf{F} = (x^2y, -y^3, 3)$ قرار دارد را یک بار مستقیم، و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید.

پاسخ: الف - به کمک قضیه استوکس رویه

$$S : z = 1 - x^2 - y^2; (x, y) \in D,$$

را در نظر می‌گیریم، که $D: x^2 + y^2 \leq 1$. به شکل ۳۸.۲ توجه شود. تابع معرف رویه $f = x^2 + y^2 + z$ است. بنابراین

$$\mathbf{n} = \pm \frac{f'}{\|f'\|} = \pm \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

$$d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f_z|} dx dy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy.$$

که با توجه به لزوم سازگاری جهت S و C و شکل ۳۸.۲ حالت $+$ در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. از طرفی

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y & -y^3 & 3 \end{vmatrix} = (0, 0, -x^2)$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_D (0, 0, -x^2) \cdot (2x, 2y, 1) \\ &= - \iint_D x^2 dx dy \stackrel{(1)}{=} - \iint_{D'} r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta \\ &= - \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(ب) محاسبه مستقیم) ابتدا منحنی را پارامتره می‌کنیم:

$$C: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin t, -\sin^3 t, 3) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t + \sin^3 t \cos t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{8} (1 - \sin 4t) + \frac{1}{4} \sin^4 t \right\} dt = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

۸.۲۰. تنها به یکی از دو مورد زیر پاسخ دهید:

الف) رویه درجه دوم $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + x - y = 0$ را به شکل کانونی تبدیل کرده، نوع آن را مشخص کنید.

ب) ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر به ماتریس

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

را بدست آورده و سپس آن را قطری کنید.

پاسخ: ماتریس نظیر به قسمت درجه دوم چندجمله‌ای سازنده معادله داده شده، یعنی

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + x - y,$$

عبارت است از

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

معادله مشخصه آن $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ است که بنابراین، مقادیر ویژه آن $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = -2$ و $\lambda_3 = 1$ هستند. با حل دستگاه $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ، که $i = 1, 2, 3$ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, -2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1).$$

چنانچه $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$ بردار یکه نظری به $\mathbf{v}_i$ با $i = 1, 2, 3$ باشد و $B = [\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3]$ ماتریس حاصل از قرار دادن بردارهای $\mathbf{w}_i$ به صورت ستونی و به ترتیب در کنار هم باشد، در این صورت

$$B = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

این ماتریس، ماتریسی متعامد است (یعنی $B^{-1} = B$) و بعلاوه

$$B^t A B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تا اینجا به قسمت (ب) پاسخ داده شده است. در ادامه برای پاسخ به قسمت (الف)، فرض می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{6} + z/\sqrt{3} \\ x/\sqrt{2} + y/\sqrt{6} + z/\sqrt{3} \\ -2y/\sqrt{6} + z/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

که پس از جایگذاری این مقادیر در معادله داده شده، به تصویر این رویه در فضای $Ouvw$ می‌رسیم:
 $2u^2 - 2v^2 + w^2 - \sqrt{2}u = 0$. این رویه یک هذلولی گون یک پارچه است:

$$\frac{(u - \sqrt{2}/4)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{v^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{w^2}{4^2} = 1.$$

پاسخ مسایل امتحان بیست و یکم

۱.۲۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. فرمولی کلی برای A^n که n عددی طبیعی است، بدست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $A^n = \begin{bmatrix} x_n & 0 \\ y_n & z_n \end{bmatrix}$. در نتیجه، چون $A^0 = I_2$ ، داریم $x_0 = z_0 = 1$ و $y_0 = 0$.
بعلاوه از $A^{n+1} = A^n A$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{n+1} & 0 \\ y_{n+1} & z_{n+1} \end{bmatrix} &= A^{n+1} = A^n A \\ &= \begin{bmatrix} x_n & 0 \\ y_n & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax_n & 0 \\ ay_n + bz_n & cz_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$x_{n+1} = ax_n, \quad (2.7)$$

$$y_{n+1} = ay_n + bz_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

$$z_{n+1} = cz_n. \quad (2.9)$$

اکنون از اینکه $x_0 = 1$ و فرمول ۲.۷ نتیجه می‌گردد که $x_n = a^n$ به صورت مشابه از اینکه $z_0 = 1$ و فرمول ۲.۹ نتیجه می‌شود $z_n = c^n$. بنابراین، از ۲.۸ داریم: $y_{n+1} = ay_n + bc^n$. در نتیجه

$$\begin{aligned} y_n &= ay_{n-1} + bc^{n-1} \\ &= a(ay_{n-2} + bc^{n-2}) + bc^{n-1} \\ &= a^2 y_{n-2} + b(c^{n-1} + ac^{n-2}) \\ &\dots \dots \dots \\ &= a^n y_0 + b(c^{n-1} + ac^{n-2} + a^2 c^{n-3} + \dots + a^{n-1}) \\ &= \begin{cases} b(a^n - c^n)/(a - c) & \text{اگر } a \neq c \\ 0 & \text{اگر } a = c \end{cases} \end{aligned}$$

آخرین بروز رسانی: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

۲۱.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و یکم ۱۷۷ فصل ۲. پاسخ مسایل

در نتیجه، اگر $a = c$ ، آنگاه به ازای هر $n \geq 2$ ای $A^n = a^n I_n$ و در این صورت به ازای هر n ای

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ b(a^n - c^n)/(a - c) & c^n \end{bmatrix}.$$

۲.۲۱. فرض کنید صفحه $x + y + z = 1$ را با مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ برخورد داده و منحنی حاصل را بر صفحه xOy تصویر کنیم. ضمن تعیین معادله این منحنی، نوع آن را مشخص کرده و آن را ترسیم کنید.

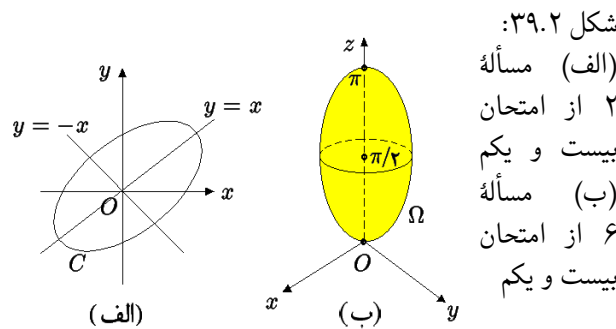
پاسخ: از $x + y + z = 1$ نتیجه می‌گیریم $z = 1 - x - y$ و با قرار دادن در $x^2 + y^2 = z^2$ نتیجه می‌گیریم $2x^2 + 2y^2 = 2xy + 1$. این منحنی را به صورت $3(x - y)^2 + (x + y)^2 = 2$ می‌توان مربع کامل نمود. در نتیجه، داریم تصویر منحنی مورد نظر بر صفحه xOy عبارت است از

$$\frac{(x - y)^2}{(\sqrt{2/3})^2} + \frac{(x + y)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

که یک بیضی است. چنانچه فرض کنیم $u = x - y$ و $v = x + y$ ، این منحنی به شکل

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2/3})^2} + \frac{v^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

در صفحه uOv تبدیل می‌شود. پس کافی است دو محور $y = 2x$ و $y = 0$ را ترسیم کنیم و در این صفحه، بیضی مورد نظر را ترسیم کنیم. به شکل ۳۹.۲- (الف) توجه شود.



۲.۲۱. در پیوستگی تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^4} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

۲۱.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و یکم ۱۷۸ فصل ۲. پاسخ مسایل

پاسخ: این تابع در همسایگی هر نقطه $X_0 \neq (0,0)$ ای با تابع مقدماتی $x^2y/(x^2+y^4)$ برابر است که تابعی پیوسته است. بنابراین، f بر کل $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ پیوسته است. اما، f در $(0,0)$ نیز پیوسته است، زیرا

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2y}{x^2+y^4} \right| = \frac{x^2|y|}{x^2+0} = |y|.$$

از طرفی، اگر $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ، آنگاه $|y| \rightarrow 0$. بنابراین، f بر کل $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

۴.۲۱. در صورتی که $xyz = x^2 + 2z^2$ ، مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1,1)}$.

پاسخ: فرض کنید $f = xyz - x^2 - 2z^2$ ، در این صورت، بنابه قضیه تابع ضمنی، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} &= -\frac{f_x}{f_z} & \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1,1)} &= -\frac{f_y}{f_z} \\ &= \frac{2x - yz}{xy - 4z} \Big|_{(1,1,1)} = -3, & &= \frac{-xz}{xy - 4z} \Big|_{(1,1,1)} = 3, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1,1)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{(1,1,1)} \\ &= -\frac{\left(-z - x \frac{\partial z}{\partial x} \right) (xy - 4z) - \left(y - 4 \frac{\partial z}{\partial x} \right) (-xz)}{(xy - 4z)^2} \Big|_{(1,1,1)} \\ &= \frac{x^2 y^2 z + 4xyz^2 - 16z^3 - 2x^3 y}{(xy - 4z)^3} = -\frac{17}{27}. \end{aligned}$$

۵.۲۱. در صورتی که نقطه (x,y) از جسم تخت محدود به منحنیهای $x^2y = 1$ ، $x^2y = 2$ ، $xy^2 = 1$ و $xy^2 = 2$ دارای چگالی جرمی $\delta(x,y) = x^5y^5$ باشد، جرم آن را بدست آورید.

پاسخ: از تغییر متغیر $u = x^2y$ و $v = xy^2$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} D : 1 \leq x^2y \leq 2, 1 \leq xy^2 \leq 2, & \quad J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1 \div \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| \\ D' : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2, & \quad = 1 \div \left\| \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3x^2y^2}. \end{aligned}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \delta dA = \iint_D x^5y^5 dx dy \\ &= \iint_{D'} x^5y^5 \frac{1}{3x^2y^2} dudv = \frac{1}{3} \iint_{D'} x^3y^3 dudv \end{aligned}$$

۲۱.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و یکم ۱۷۹ فصل ۲. پاسخ مسایل

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \iint_{D'} x^2 y \cdot xy^2 \, du dv = \frac{1}{3} \iint_{D'} uv \, du dv \\ &= \left(\int_1^2 u \, du \right) \left(\int_1^2 v \, dv \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

۶.۲۱. فرض کنید Ω جسم بسته به ضابطه $x^2 + y^2 \leq \sin z$ با $0 \leq z \leq \pi$ است. در صورتی که نقطه (x, y, z) از آن دارای چگالی جرمی z باشد، گشتاور ماند آن حول z -محور را بدست آورید.

پاسخ: از صورت مسأله چنین بر می آید که ناحیه مورد نظر عبارت است از $\Omega : 0 \leq z \leq \pi, x^2 + y^2 \leq \sin z$. به کمک مختصات استوانه ای می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Omega' : 0 \leq z \leq \pi, r^2 \leq \sin z, \\ : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \pi, 0 \leq r \leq \sqrt{\sin z}. \end{aligned}$$

به قسمت (ب) از شکل ۳۹.۲ توجه شود. در نتیجه، گشتاور Ω حول z -محور برابر است با

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \delta \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) \, dV = \iiint_{\Omega'} r^2 \cdot z \cdot r \, dV' \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\sqrt{\sin z}} r^3 \, dr \right] dz \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{\sin z}} dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} z \sin^2 z \, dz \\ &= \frac{\pi}{8} [z^2 + 1 - z \sin 2z - \cos^2 z]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

۷.۲۱. فرض کنید C اجتماع نمودار تابع $r = \theta$ با $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و پاره خط از $(0,0)$ تا $(0, 2\pi)$ در صفحه xOy است. انتگرال میدان برداری $\mathbf{F} = -y^3 \mathbf{i} + x^3 \mathbf{j}$ را بر C با جهت مثلثاتی، محاسبه کنید.

پاسخ: منحنی قطبی مورد نظر را به روش نقطه یابی ترسیم می کنیم:

θ	0	$\pi/2$	π	π	$3\pi/2$	2π
r	0	$\pi/2$	π	π	$3\pi/2$	2π

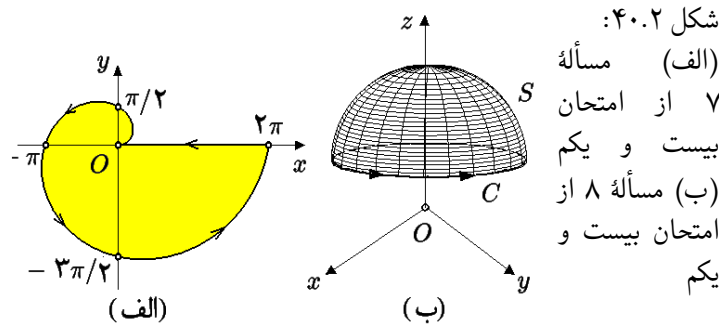
به شکل ۴۰.۲-الف توجه شود. چون این منحنی یک منحنی ژردان است و جهت آن نیز استاندارد انتخاب شده است و میدان برداری $\mathbf{F}$ بر درون C دیفرانسیلپذیر است:

$$D : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \theta.$$

۲۱.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و یکم ۱۸۰ فصل ۲. پاسخ مسایل

بنابراین، از قضیه گرین برای محاسبه این انتگرال می توان استفاده نمود. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C -y^3 dx + x^3 dy \\ &= \iint_D ((x^3)_x - (-y^3)_y) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 3 \iint_{D'} r^2 \cdot r dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\theta} r^3 dr \right] d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \theta^4 d\theta = 12\pi^4.\end{aligned}$$



۸.۲۱. فرض کنید $\mathbf{F} = (z^3, y^3, x^3)$ و S قسمتی از نیمه بالایی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ است که در نیم فضای $0 \leq x$ قرار دارد و بردار $\mathbf{n}$ بر S رو به بالا جهت دارد. مطلوبست محاسبه انتگرال میدان برداری $\text{Curl}(\mathbf{F})$ بر لبه S به کمک قضیه استوکس.

پاسخ: ابتدا سطح مورد نظر را شناسایی می کنیم:

$$S : z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}; (x, y) \in D,$$

$$D : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x.$$

به شکل ۴۰.۲- (ب) توجه شود. به این ترتیب، تابع معرف S عبارت است از $f = x^2 + y^2 + z^2 - 2z$ و لذا

$$\begin{aligned}\mathbf{n} d\sigma &= \pm \frac{f'}{|f_z|} dx dy = \pm \frac{(2x, 2y, 2z - 2)}{|2z - 2|} dx dy \\ &= \pm (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\end{aligned}$$

که با توجه به صورت مسأله، حالت + مورد قبول است. از طرفی

$$\begin{aligned}\text{Curl}(\text{Curl}(\mathbf{F})) &= \text{Curl} \left(\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix} \right) \\ &= \text{Curl}((0, 3z^2 - 3x^2, 0)) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 3z^2 - 3x^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-6z, 0, -6x).\end{aligned}$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\oint_C \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \text{Curl}(\text{Curl}(\mathbf{F})) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_{(S)} (-6 - 6\sqrt{1-x^2-y^2}, 0, -6x) \cdot (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= -6 \iint_D \frac{x + 2x\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy \\ &\stackrel{(1)}{=} \iint_D r \cos \theta \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r dr d\theta \\ &= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r^2 \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \frac{1 + \cos t}{\cos t} \cos t dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از تغییر متغیر قطبی استفاده نموده‌ایم و D' تصویر D در صفحه $rO\theta$ عبارت است از $0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. در (۲) نیز از تغییر متغیر $t = \sin \theta$ استفاده نموده‌ایم.

پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم

۱.۲۲. نوع رویه درجه دوم $x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 2yz = k$ را به ازای مقادیر مختلف k مشخص کنید.

پاسخ: فرض کنیم رویه را S_k بنامیم. معادله معرف آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 2yz &= (x - 2z)^2 - 3z^2 + y^2 - 2yz \\ &= (x - 2z)^2 + (y - z)^2 - 4z^2. \end{aligned}$$

پس با فرض $X = x - 2z$, $Y = y - z$ و $Z = 2z$ ، می‌توان نوشت $X^2 + Y^2 - Z^2 = k$. توجه شود که با تغییر مختصات جدید، نوع رویه درجه دوم S_k تغییر نمی‌کند و تنها انتقال، دوران، انعکاس و یا تجانس بر آن انجام می‌پذیرد. سه حالت ممکن است:

(۱) اگر $0 < k$ ، آنگاه S_k هذلولی‌گون یکپارچه است،

(۲) اگر $0 = k$ ، آنگاه S_k مخروط است، و

(۳) اگر $0 > k$ ، آنگاه S_k هذلولی‌گون دوپارچه است.

۲.۲۲. فرض کنید C فصل مشترک رویه‌های $xy + z = 1$ و $x^2 + y + z = 2$ باشد. برای این منحنی بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{B}$ و مقدار انحناء را در نقطه $(2, 3, -5)$ بیابید.

پاسخ: ابتدا باید منحنی را پیمایش کنیم. از معادله اول z را یافته و در معادله دوم قرار می‌دهیم: $x^2 - xy + y = 1$. این معادله را به صورت $(x - 1)(x - y + 1)$ می‌توان نوشت. پس یا $x = 1$ یا اینکه $y = x + 1$. چون قرار است نقطه $(2, 3, -5)$ بر منحنی باشد، حالت اول مورد قبول نیست. بنابراین، $y = x + 1$ و با توجه به معادله اول $z = 1 - x(x + 1)$ ، در نتیجه،

$$C : \mathbf{r}(t) = (t, t + 1, 1 - t - t^2), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(1) = (2, 3, -5),$$

که یک سهمی در صفحه $y = x + 1$ است. اکنون،

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(1) &= (1, 1, -1 - 2t) \Big|_{t=1} \\ &= (1, 1, -3), \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{r}(1)\| = \sqrt{11},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(1) &= (0, 0, -2) \Big|_{t=1} \\ &= (0, 0, -2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(1) &= \mathbf{r}'(1) / \|\mathbf{r}'(1)\| \\ &= (1, 1, -3) / \sqrt{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-2, 2, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)\| &= 2\sqrt{2}, \\ \mathbf{B}(1) &= \frac{\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)}{\|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)\|} \\ &= (-1, 1, 0) / \sqrt{2}, \end{aligned}$$

۲۲.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم ۱۸۳ فصل ۲. پاسخ مسایل

$$\mathbf{N}(1) = \mathbf{B}(1) \times \mathbf{T}(1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3, 3, -2),$$

$$\begin{aligned} \kappa(1) &= \frac{\|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)\|}{\|\mathbf{r}'(1)\|^3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}^3}. \end{aligned}$$

۳.۲۲. معادله صفحه مماس بر رویه $z = xy$ و عمود بر خط $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ را بنویسید.

پاسخ: فرض کنیم رویه S ، خط ℓ ، صفحه مورد نظر P و نقطه مماس بر رویه $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ باشد. نرمال بر P را گرادینان معادله معرف S در X_0 می‌توان در نظر گرفت:

$$\mathbf{n} = \nabla(xy - z)|_{X_0} = (y_0, x_0, -1).$$

در صورتی P بر ℓ عمود است، که موازی هادی خط $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$ باشد. یعنی، نسبت مختصات $\mathbf{v}$ و $\mathbf{n}$ یکی باشد: $x_0/2 = y_0/2 = -1/(-1)$. بنابراین، $x_0 = y_0 = 2$. اما قرار است X_0 بر S قرار داشته باشد، پس $z_0 = x_0 y_0$ یا $z_0 = 4$. بعبارت دیگر، $X_0 = (2, 2, 4)$ و معادله صفحه P چنین است:

$$P : 2(x-2) + 2(y-2) - 1(z-4) = 0,$$

$$: 2x + 2y - z = 4.$$

۴.۲۲. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر مفروض است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(الف) آیا f در مبدا پیوسته است؟

(ب) آیا $\partial f / \partial x$ در مبدا پیوسته است؟

(ج) مشتق جهتی f در مبدا و در امتداد بردار یک دلخواه $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ را بدست آورید.

پاسخ: (الف) با استفاده از مسیر $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ از تابع f حد مسیری می‌گیریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t^3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 \cdot t^6}{t^{12} + t^{12}} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، f در مبدا پیوسته نیست.

(ب) ابتدا باید ضابطه $\partial f / \partial x$ را بیابیم: اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} = \frac{3x^2 y^2 (y^4 - x^6)}{(x^6 + y^4)^2}.$$

۲۲.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم ۱۸۴ فصل ۲. پاسخ مسایل

ولی، اگر $(x, y) = (0, 0)$ ؛ آنگاه

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

اما تابع $\partial f / \partial x$ نیز در مبداء پیوسته نیست، زیرا حد آن بر مسیر $\mathbf{r}(t) = (t, t)$ برابر مقدار تابع در نقطه $f(0, 0)$ نیست:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^4(t^4 - t^6)}{(t^6 + t^4)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2} = 3.$$

پیامد مستقیم این ناپیوستگی، عدم وجود مشتق f در مبداء است.

ج) چون تابع مشتقپذیر نیست، ناگزیر مشتق مسیری آن را با استفاده تعریف محاسبه می‌کنیم. اگر $u_2 \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(0, 0) &= \left. \frac{d}{dt} f(0 + tu_1, 0 + tu_2) \right|_{t=0} \stackrel{(1)}{=} \left. \frac{d}{dt} \frac{(tu_1)^3 (tu_2)^2}{(tu_1)^6 + (tu_2)^4} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \frac{tu_1^3 u_2^2}{u_1^6 t^2 + u_2^4} \right|_{t=0} = u_1^3 u_2^2 \left. \frac{u_2^4 - u_1^6 t^2}{(u_1^6 t^2 + u_2^4)^2} \right|_{t=0} = \frac{u_1^3}{u_2^2}. \end{aligned}$$

اما، اگر $u_2 = 0$ ، آنگاه در (1) کسر و لذا مقدار نهایی صفر می‌گردد.

۵.۲۲. فرض کنید $u = u(x, y)$ ، $v = v(x, y)$ ، $z = f(x, y)$ ، $z = f(x, y)$ ، $u^3 + 2v^3 = z$ ، $u^2 + v^2 = x$ و $u + v = y$.
مطلوب است محاسبه $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$.

پاسخ: از خواص ماتریسهای ژاکوبی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\Delta(z)}{\Delta(x, y)} = \frac{\Delta(z)}{\Delta(u, v)} \cdot \frac{\Delta(u, v)}{\Delta(x, y)} \\ &= \frac{\Delta(f)}{\Delta(u, v)} \frac{\Delta(x, y)}{\Delta(u, v)}^{-1} = (z_u, z_v) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (3u^2, 6v^2) \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(u-v)} (3u^2, 6v^2) \begin{pmatrix} 1 & -2v \\ -1 & 2u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3u^2 - 6v^2}{2(u-v)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{12uv^2 - 6u^2v}{2(u-v)}.$$

۶.۲۲. مطلوب است محاسبه اکستریمومهای نسبی و مطلق تابع $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2$ بر ناحیه $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

پاسخ: ابتدا وجود نقاط تکین تابع f در داخل ناحیه D را مطالعه می‌کنیم:

$$f'(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 6x + 4y = 0, \\ f_y = 4x + 6y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

۲۲.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم ۱۸۵ فصل ۲. پاسخ مسایل

یعنی، تنها نقطه تکین تابع مفروض مبدا $(0,0)$ است. برای تشخیص نوع اکسترموم احتمالی مبدا، از آزمون مشتق مرتبه دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A = f_{xx}(0,0) &= 6 > 0, & B = f_{yy}(0,0) &= 6, \\ C = f_{xy}(0,0) &= 4, & D = AB - C^2 &= 32 > 0 \end{aligned}$$

پس، مینیموم موضعی تابع f بر مبدا اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر صفر است. در ادامه، برای اکسترموم مطلق لازم است تا اکسترموم f بر لبه D را نیز بررسی کنیم، یعنی بر دایره $C: x^2 + y^2 = 1$. این دایره را به صورت $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ پیمایش نموده، فرض می‌کنیم $g(t) := f(\cos t, \sin t) = 2 \sin 2t + 3$. پس باید، اکسترموهای تابع g را بر بازه $[0, 2\pi]$ مطالعه نماییم: این تابع در نقاط $2t = 2k\pi + \pi/2$ حداکثر مقدار ۵ را می‌گیرد و در نقاط $2t = 2k\pi + 3\pi/2$ حداقل مقدار ۱ را اختیار می‌کند:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, & f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 5, \\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0, & f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین، ماکزیموم مطلق f بر D برابر ۵ است که در نقاط $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ و $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ رخ می‌دهد و مینیموم مطلق f بر D برابر ۱ است که در نقاط $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ و $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ رخ می‌دهد.

۷.۲۲. انتگرال زیر را حل کنید:

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} e^{(x^2+y^2)} dx \right] dy + \int_{\sqrt{3}/2}^{3/2} \left[\int_{\sqrt{3y/3}}^{\sqrt{3-y^2}} e^{(x^2+y^2)} dx \right] dy.$$

پاسخ: ابتدا ناحیه را در xOy ترسیم می‌کنیم. برای این منظور باید حدود دو انتگرال را شناسایی کنیم. $x = \sqrt{1-y^2}$ یعنی $x^2 + y^2 = 1$ و $0 \leq x$. به عبارت دیگر، نیمه سمت چپی دایره به مرکز مبدا و شعاع ۱. $x = \sqrt{3-y^2}$ یعنی $x^2 + y^2 = 3$ و $0 \leq x$. به عبارت دیگر، نیمه سمت چپی دایره به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt{3}$. $x = \sqrt{3y/3}$ خطی است که از مبدا و با شیب $\sqrt{3}/3$ یا 60° می‌گذرد. به شکل ۹۹-الف توجه شود. این ناحیه را به مختصات قطبی می‌بریم:

$$D' : 1 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

بنابراین، انتگرال I داده شده برابر است با

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{D'} e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/3} d\theta \right) \left(\int_1^{\sqrt{3}} r e^{r^2} dr \right) = \frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} (e^3 - e). \end{aligned}$$

۲۲.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم ۱۸۶ فصل ۲. پاسخ مسایل

۸.۲۲. انتگرال زیر را در ناحیه ω که محدود به رویه‌های $y = 2x^2 + 2z^2$ و $y = 8$ است محاسبه کنید:

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz.$$

پاسخ: با توجه به صورت مساله، سهمی‌گون بیضوی $y = 2x^2 + 2z^2$ و صفحه $y = 8$ یکدیگر را در $y = 8$ قطع می‌کنند که تصویر آن بر صفحه yOz دایره $x^2 + z^2 = 4$ می‌باشد. بنابراین،

$$\Omega : x^2 + z^2 \leq 4, 2x^2 + 2z^2 \leq z \leq 8.$$

به دلیل تقارن مساله نسبت به محور y ها، از مختصات استوانه‌ای در راستای محور y ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Omega' : r^2 \leq 4, 2r^2 \leq z \leq 8, \\ : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2r^2 \leq z \leq 8. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega'} r^2 dy dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^2 \left[\int_{2r^2}^8 r^2 dr \right] dr \right) = 2\pi \int_0^2 [r^2 y]_{y=2r^2}^{y=8} dr \\ &= 4\pi \int_0^2 r^2(4 - r^2) dr = 4\pi \left[4\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{256}{15}\pi. \end{aligned}$$

۹.۲۲. گشتاور ماند سطح $|x| + |y| + |z| = 1$ با چگالی ۱ در دوران حول مبدا مختصات محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه فرمول مکانیک، لازم است از تابع $f = (x^2 + y^2 + z^2)\delta$ بر ناحیه $S : |x| + |y| + |z| = 1$ انتگرال بگیریم، که $\delta(x, y, z) = 1$ تابع چگالی جرمی است. چون با تعویض x به $-x$ در f و یا S تغییری رخ نمی‌دهد، پس در انتگرال مورد محاسبه می‌شود فرض کرد $0 \leq x$ و حاصل را در ۲ ضرب نمود. اما این تقارن نسبت به y و z نیز هست. پس، می‌شود فرض کرد S تنها در یک-هشتم اول قرار دارد و حاصل را در ۸ ضرب نمود. اما،

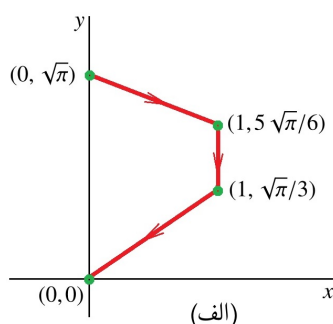
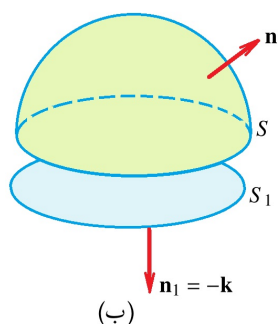
$$S_{1/8} : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z = 1.$$

$$: z = 1 - x - y, (x, y) \in D,$$

که در آن $D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ بنابراین،

$$\begin{aligned} I_O(\Omega) &= \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \delta d\sigma = 8 \iint_{S_{1/8}} (x^2 + y^2 + z^2) \delta d\sigma \\ &= 8 \iint_D (x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2) \cdot 1 \cdot \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8\sqrt{3} \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + (1-x-y)^2) dy \right] dx \\
 &= 8\sqrt{3} \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \frac{8}{3}\sqrt{3} \int_0^1 (-5x^3 + 9x^2 - 6x + 2) dx \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{3} [-5x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 8x]_0^1 = 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$



شکل ۴۱.۲: الف)
منحنی در مساله ۱۰ از
امتحان ۲۲ (ب) حل
مساله ۱۱ از امتحان
۲۲

۱۰.۲۲. کار میدان برداری

$$\mathbf{F} = (ye^{xy} \cos(x^2 - y^2) - 2xe^{xy} \sin(x^2 - y^2), xe^{xy} \cos(x^2 - y^2) + 2ye^{xy} \sin(x^2 - y^2)),$$

در جابجایی یک متحرک روی مسیر در شکل ۴۱.۲-الف را محاسبه نمایید.

پاسخ: این میدان ابقایی است، زیرا اگر درایه‌های آن را بترتیب P و Q بنامیم، آنگاه

$$P_y = e^{xy} \cos(x^2 - y^2) + xye^{xy} \cos(x^2 - y^2) - 2y^2 e^{xy} \sin(x^2 - y^2) = Q_x,$$

و دامنه $\mathbf{F}$ ، یعنی $\mathbb{R}^2$ ستاره شکل است. پس فرقی نمی‌کند که در انتگرال $\mathbf{F}$ از چه مسیری از $A = (0, \sqrt{\pi})$ تا $O = (0, 0)$ بیایم. تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x, y) = \begin{cases} \int P dx = e^{xy} \cos(x^2 - y^2) + g(y), \\ \int Q dy = e^{xy} \cos(x^2 - y^2) + h(x), \end{cases}$$

که با مقایسه‌ای ساده نتیجه می‌شود که $g(y)$ و $h(x)$ ثابتند و ثابت $f = e^{xy} \cos(x^2 - y^2)$ پس در مجموع، داریم

$$\int_A^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(O) - f(A) = 1 - (-1) = 2.$$

۱۱.۲۲. شار عبوری میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2 \sin^2 z, y + z^4 \sinh x, z^3 + 3z(x^2 + y^2)).$$

از نیمه بالایی کره به مرکز مبدا و شعاع یک را در جهت $\mathbf{n}$ رو به بالا بیابید.

پاسخ: برای اینکه در مساله بتوان از قضیه دیورژانس استفاده نمود، رویه داده شده S را با یک قرص S_1 واقع در صفحه xOy به مرکز در مبدا و شعاع یک می‌بندیم، تا به رویه‌ای بسته $S + S_1$ برسیم. اما این رویه جدید را به صورت

$$S_1 : z = 0, (x, y) \in D, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1.$$

که باید $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$ و $d\sigma_1 = dxdy$ بنابراین،

$$\iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dxdy = \iint_D 0 dxdy = 0.$$

اکنون، چون $\mathbf{F}$ هموار و $S + S_1$ رویه‌ای بسته و برونسوی است، از قضیه دیورژانس می‌توان استفاده نمود. به شکل ۴۱.۲-ب توجه شود. بنابراین، اگر Ω داخل $S + S_1$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \iiint_{(S+S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = \iiint_{\Omega} (2 + 3z^2 + 3(x^2 + y^2)) dV \\ &= 2 \iiint_{\Omega} dV + 3 \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV \\ &= 2 \operatorname{Vol}(\Omega) + 3 \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi dV \\ &\stackrel{(1)}{=} 2 \frac{4}{3} \pi \times 1^3 + 3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{8}{3} \pi + 3 \times 2\pi \times \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \times [-\cos^3 \varphi]_0^{\pi} = \frac{4}{15} \pi. \end{aligned}$$

توضیح اینکه $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ، که در مختصات کروی به صورت

$$\Omega : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1,$$

می‌شود. بعلاوه در (1) از مستطیلی بودن دامنه و ضربی بودن تابع استفاده شده است. پس در مجموع،

$$\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{(S+S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma - \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{4}{15} \pi.$$

۱۲.۲۲. مقدار انتگرال $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ را با استفاده از قضیه استوکس در صورتی محاسبه کنید که C بیضی حاصل از برخورد صفحه $z = 2$ و استوانه $x^2/4 + y^2/9 = 1$ و با جهت مثبت مثلثاتی است و

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + e^x, 2yz + e^y, 2xz + e^z).$$

۲۲.۲. پاسخ مسایل امتحان بیست و دوم ۱۸۹ فصل ۲. پاسخ مسایل

با توجه به صورت مساله، بهتر است C را لبه ناحیه بیضوی توپر S جدا شده از صفحه $z = 2$ بگیریم. به عبارت دیگر

$$S : z = 2, (x, y) \in D, \quad D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$$

در این رویه $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ و $d\sigma = dxdy$. همچنین،

$$\begin{aligned} \text{Curl} F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + e^x & 2yz + e^y & 2xz + e^z \end{vmatrix} \\ &= (-2y, -2z, -2x). \end{aligned}$$

پس، بنابه قضیه استوکس، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{(S)} \text{Curl} F \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D -2(y, z, x) \cdot (0, 0, 1) dxdy = -2 \iint_D x dA = 0. \end{aligned}$$

زیرا تابع $-2x$ بر دامنه متقارن D فرد است.

فرمولهای لازم

مثلثات

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x},$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

مشق

$$c' = 0,$$

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

$$(\sin u)' = u' \cos u,$$

$$(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u),$$

$$(a^u)' = (\ln a) u' a^u,$$

$$(\sin^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -(\cos^{-1} u)',$$

$$(\tan^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2} = -(\cot^{-1} u)',$$

$$(cu)' = cu',$$

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

$$(n^n)' = nu' n^{n-1},$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u,$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},$$

$$(e^u)' = u' e^u,$$

انتگرال

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx + C \quad (a \text{ عددی ثابت است}),$$

$$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx + C,$$

$$\int u dv = uv - \int v du + C,$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,$$

$$\int \cos u du = \sin u + C,$$

$$\int \cot u du = \ln|\sin u| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln|\csc u - \cot u| + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \mp a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \mp a^2} \right| + C,$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 \mp a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 \mp a^2}}{u} \right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C,$$

$$\int e^u du = e^u + C,$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C,$$

$$\int \tan u du = \ln|\sec u| + C,$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln|\sec u + \tan u| + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{ax+b} = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + C.$$

نمایه

امتحان ۸، مساله ۳، ۱۴	انتگرال خط
امتحان ۸، مساله ۵، ۱۴	امتحان ۲۲، مساله ۱۰، ۲۹
امتحان ۹، مساله ۷، ۱۵	انتگرال دوگانه
انتگرال دوگانه	امتحان ۱، مساله ۴، ۷
امتحان ۲۲، مساله ۷، ۲۹	امتحان ۱۰، مساله ۴، ۱۶
انتگرال سطح	امتحان ۱۱، مساله ۵، ۱۷
امتحان ۲۲، مساله ۱۱، ۲۹	امتحان ۱۱، مساله ۷، ۱۷
امتحان ۲۲، مساله ۱۲، ۲۹	امتحان ۱۲، مساله ۷، ۱۸
امتحان ۲۲، مساله ۹، ۲۹	امتحان ۱۳، مساله ۱، ۱۸
انتگرال سه گانه	امتحان ۱۴، مساله ۴، ۲۰
امتحان ۱، مساله ۵، ۸	امتحان ۱۴، مساله ۵، ۲۰
امتحان ۱۰، مساله ۵، ۱۶	امتحان ۱۵، مساله ۴، ۲۰
امتحان ۱۱، مساله ۶، ۱۷	امتحان ۱۶، مساله ۵، ۲۲
امتحان ۱۲، مساله ۹، ۱۸	امتحان ۱۷، مساله ۵، ۲۲
امتحان ۱۳، مساله ۵، ۱۹	امتحان ۱۸، مساله ۵، ۲۴
امتحان ۱۴، مساله ۶، ۲۰	امتحان ۱۹، مساله ۴، ۲۵
امتحان ۱۵، مساله ۶، ۲۰	امتحان ۲، مساله ۴، ۹
امتحان ۱۶، مساله ۶، ۲۲	امتحان ۲۰، مساله ۴، ۲۶
امتحان ۱۸، مساله ۶، ۲۴	امتحان ۲۱، مساله ۵، ۲۸
امتحان ۱۹، مساله ۷، ۲۶	امتحان ۳، مساله ۵، ۹
امتحان ۲، مساله ۵، ۹	امتحان ۴، مساله ۴، ۱۰
امتحان ۲۱، مساله ۶، ۲۸	امتحان ۵، مساله ۵، ۱۱
امتحان ۳، مساله ۷، ۱۰	امتحان ۵، مساله ۷، ۱۱
امتحان ۴، مساله ۵، ۱۰	امتحان ۶، مساله ۵، ۱۲
امتحان ۵، مساله ۶، ۱۱	امتحان ۷، مساله ۶، ۱۳

امتحان ۶، مساله ۶، ۱۲
 امتحان ۷، مساله ۵، ۱۳
 امتحان ۹، مساله ۵، ۱۵
 انتگرال سه گانه
 امتحان ۲۲، مساله ۸، ۲۹
 توابع برداری

امتحان ۱، مساله ۲، ۱۱
 امتحان ۱۰، مساله ۲، ۱۶
 امتحان ۱۴، مساله ۳، ۱۹
 امتحان ۱۵، مساله ۳، ۲۰
 امتحان ۱۶، مساله ۲، ۲۱
 امتحان ۱۷، مساله ۱، ۲۲
 امتحان ۲۰، مساله ۲، ۲۶
 امتحان ۳، مساله ۳، ۹
 امتحان ۷، مساله ۳، ۱۳
 امتحان ۸، مساله ۲، ۱۴
 امتحان ۹، مساله ۴، ۱۵

جبر خطی

امتحان ۱۳، مساله ۶، الف، ۱۹
 امتحان ۲۲، مساله ۱، ۲۸
 امتحان ۱۸، مساله ۱، ۲۳
 امتحان ۲۰، مساله ۸، ۲۷
 امتحان ۲۱، مساله ۱، ۲۷

حد و پیوستگی

امتحان ۲۲، مساله ۴، ۲۹
 امتحان ۱، مساله ۱، ۱۶
 امتحان ۱، مساله ۱، ۷
 امتحان ۱۲، مساله ۳، ۱۷
 امتحان ۱۴، مساله ۱، ۱۹
 امتحان ۱۵، مساله ۱، ۲۰
 امتحان ۱۶، مساله ۳، ۲۱
 امتحان ۱۸، مساله ۳، ۲۴
 امتحان ۱۹، مساله ۳، ۲۵
 امتحان ۲، مساله ۱، ۸
 امتحان ۲۱، مساله ۳، ۲۸

امتحان ۳، مساله ۲، ۹
 امتحان ۵، مساله ۳، ۱۱
 امتحان ۶، مساله ۴، ۱۲
 امتحان ۷، مساله ۲، ۱۳
 امتحان ۸، مساله ۱، ۱۴
 امتحان ۹، مساله ۲، ۱۵

قضیه استوکس

امتحان ۱، مساله ۷، ۸
 امتحان ۱۰، مساله ۷، ۱۶
 امتحان ۱۱، مساله ۸، ۱۷
 امتحان ۱۲، مساله ۵، ۱۸
 امتحان ۱۳، مساله ۲، ۱۸
 امتحان ۱۳، مساله ۴، ۱۹
 امتحان ۱۴، مساله ۸، ۲۰
 امتحان ۱۵، مساله ۸، ۲۱
 امتحان ۱۶، مساله ۷، ۲۲
 امتحان ۱۷، مساله ۸، ۲۳
 امتحان ۱۸، مساله ۹، ۲۴
 امتحان ۱۹، مساله ۱۸، ۲۶
 امتحان ۲، مساله ۷، ۹
 امتحان ۲۰، مساله ۷، ۲۷
 امتحان ۲۱، مساله ۸، ۲۸
 امتحان ۳، مساله ۸، ۱۰
 امتحان ۴، مساله ۶، ۱۰
 امتحان ۶، مساله ۸، ۱۲
 امتحان ۷، مساله ۷، ۱۳
 امتحان ۸، مساله ۸، ۱۴
 امتحان ۹، مساله ۸، ۱۵

قضیه دیورژانس

امتحان ۱، مساله ۶، ۸
 امتحان ۱۰، مساله ۶، ۱۶
 امتحان ۱۲، مساله ۸، ۱۸
 امتحان ۱۳، مساله ۳، ۱۸
 امتحان ۱۴، مساله ۷، ۲۰
 امتحان ۱۵، مساله ۷، ۲۱

امتحان ۱۶، مساله ۸، ۲۲
 امتحان ۱۷، مساله ۷، ۲۳
 امتحان ۱۸، مساله ۸، ۲۴
 امتحان ۱۹، مساله ۵، ۲۵
 امتحان ۲، مساله ۶، ۹
 امتحان ۲۰، مساله ۶، ۲۷
 امتحان ۳، مساله ۶، ۱۰
 امتحان ۴، مساله ۷، ۱۰
 امتحان ۵، مساله ۹، ۱۱
 امتحان ۶، مساله ۹، ۱۲
 امتحان ۷، مساله ۸، ۱۳
 امتحان ۸، مساله ۷، ۱۴

قضیه گرین

امتحان ۱۰، مساله ۸، ۱۶
 امتحان ۱۲، مساله ۶، ۱۸
 امتحان ۱۳، مساله ۶، ۱۹
 امتحان ۱۵، مساله ۵، ۲۰
 امتحان ۱۷، مساله ۶، ۲۳
 امتحان ۱۹، مساله ۶، ۲۵
 امتحان ۲۱، مساله ۷، ۲۸
 امتحان ۶، مساله ۷، ۱۲

مشتق و کاربردهایش

امتحان ۲۲، مساله ۳، ۲۹
 امتحان ۲۲، مساله ۵، ۲۹
 امتحان ۲۲، مساله ۶، ۲۹
 امتحان ۱، مساله ۱۰، ۸
 امتحان ۱، مساله ۳، ۷
 امتحان ۱، مساله ۸، ۸
 امتحان ۱۰، مساله ۳، ۱۶
 امتحان ۱۱، مساله ۲، ۱۷
 امتحان ۱۱، مساله ۳، ۱۷
 امتحان ۱۲، مساله ۴، ۱۸
 امتحان ۱۴، مساله ۲، ۱۹
 امتحان ۱۵، مساله ۲، ۲۰
 امتحان ۱۶، مساله ۴، ۲۱

امتحان ۱۷، مساله ۲، ۲۲
 امتحان ۱۷، مساله ۳، ۲۲
 امتحان ۱۸، مساله ۴، ۲۴
 امتحان ۱۹، مساله ۱، ۲۵
 امتحان ۲، مساله ۳، ۹
 امتحان ۲۰، مساله ۳، ۲۶
 امتحان ۲۱، مساله ۴، ۲۸
 امتحان ۳، مساله ۴، ۹، ۲۲
 امتحان ۴، مساله ۲، ۱۰
 امتحان ۴، مساله ۳، ۱۰
 امتحان ۵، مساله ۴، ۱۱
 امتحان ۶، مساله ۳، ۱۲
 امتحان ۶، مساله ۴، ۱۳
 امتحان ۸، مساله ۴، ۱۴
 امتحان ۸، مساله ۶، ۱۴
 امتحان ۹، مساله ۳، ۱۵

میدانهای برداری ابقائی

امتحان ۵، مساله ۸، ۱۱
 امتحان ۶، مساله ۲، ۱۲
 امتحان ۹، مساله ۶، ۱۵

هندسه تحلیلی

امتحان ۲۲، مساله ۲، ۲۸
 امتحان ۱، مساله ۹، ۸
 امتحان ۱، مساله ۲، ۷
 امتحان ۱۰، مساله ۱، ۱۶
 امتحان ۱۱، مساله ۴، ۱۷
 امتحان ۱۲، مساله ۱، ۱۷
 امتحان ۱۲، مساله ۲، ۱۷
 امتحان ۱۶، مساله ۱، ۲۱
 امتحان ۱۸، مساله ۲، ۲۳
 امتحان ۱۹، مساله ۲، ۲۵
 امتحان ۲، مساله ۲، ۸
 امتحان ۲۰، مساله ۱، ۲۶
 امتحان ۲۰، مساله ۸، ۲۷
 امتحان ۲۱، مساله ۲، ۲۸

- امتحان ۳، مساله ۱، ۹
- امتحان ۴، مساله ۱، ۱۰
- امتحان ۵، مساله ۱، ۱۱
- امتحان ۶، مساله ۱، ۱۲
- امتحان ۷، مساله ۱، ۱۳
- امتحان ۹، مساله ۱، ۱۴

Preparation for **GENERAL MATHEMATICS II**

Mehdi Nadjafikhah

Iran University of Science and Technology¹

2020

1

Last updates: Tuesday 21st April, 2020 :

Telegram : <https://t.me/GenMat2>

Web : http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah

e-mail : m_nadjafikhah@iust.ac.ir

Copyright : Mehdi Nadjafikhah